Equazioni differenziali e la pandemia

Equ. diff.: "una relazione tra una funzione e le sue derivate".

Esempio:

$$f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per risolvere l'equazione diff. dobbiamo cercare la funzione f.

$$f' = f.$$

Altri esempi:

$f'' = -f$

$f = (f')^2$

$f = f' \cdot \sqrt{f''}$.

- Proviamo con $f(x) = \sin(x)$? $f'(x) = \cos(x)$.

  Non è una soluzione: ci sono tanti $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) \neq \sin(x)$.
- $f(x) = e^x$? $f'(x) = e^x$: $e^x = e^x$ ovviamente vero per ogni $x \in \mathbb{R}$.

  $\Rightarrow$ e^x è una soluzione.

In generale, ci sono tante soluzioni!

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = e^{x-a}, \quad a \in \mathbb{R} \\ f'(x) = e^{x-a} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{per ogni } a \in \mathbb{R} \text{ trovo un'altra soluzione di } f' = f.$$

(Tutte le soluzioni sono di questo tipo, ma per dimostrarlo serve più teoria.)

Per scegliere una soluzione unica dobbiamo fissare il valore a un certo punto: per esempio chiediamo $f(0) = 1$.

$$1 = f(0) = e^{0-a} \iff -a = \ln(1) = 0 \iff a = 0.$$

un problema ai valori iniziali
$$\begin{cases} f = f' \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

La pandemia:

(per Morbillo senza vaccinazione: $R_0 = 18$!)

Per corona (senza lockdown): $R_0 = 3$: ogni persona infettata infetta 3 altri.

Allora la crescita (la derivata) del numero di casi è uguale 3 volte il numero di casi: $f' = 3f$.

La soluzione è $f(t) = e^{3t-a}$

Se cominciamo il giorno $t=0$ con una persona:

$$1 = f(0) = e^{-a} \implies a = 0.$$

numero di casi diventa: $e^{3t} = f(t)$.

giorno	0	1	2	3	4	5	6
casi	1	$e^3 \approx 20$	e^6	8100	162 754	...	65 milioni

non realistico

Proviamo con: $f' = R_0 f(N-f)$ $\qquad$ N = numero di abitanti = 60 milioni

$f(0) = 1$.

Se quasi tutta la popolazione è infettata, $N - f \approx 0$, e f non cresce più (derivata $f' \approx 0$).

Soluzione: (indovinato)

$$f(t) = \frac{N e^{R_0 N t}}{N + e^{R_0 N t} - 1}$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{N}{N \underbrace{e^{-R_0 N t}}_{\to 0} + 1 - \underbrace{e^{-R_0 N t}}_{\to 0}} = N$$

Con guariti: 3 funzioni:

$S(t)$ = numero di persone suscettibili

$I(t)$ = " " infettati

$G(t)$ = " " guariti (e immune)

$$N = S(t) + I(t) + G(t).$$

Sistema di equazioni differenziali: $\longrightarrow$ per risolverlo dobbiamo trovare 3 funzioni compatibili!

$$S'(t) = -R_0 S(t) I(t) \qquad S(0) = N - 1$$

infezioni

$$I'(t) = R_0 S(t) I(t) - \gamma I(t) \qquad I(0) = 1$$

$$G'(t) = \gamma I(t) \qquad G(0) = 0$$

γ = parametro = probabilità per guarirsi in un giorno

Non lo possiamo risolvere $\longrightarrow$ usiamo una simulazione.

Algoritmo di Euler per la simulazione:

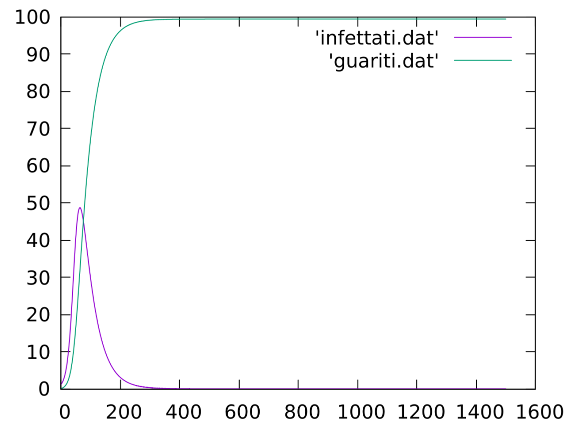
per esempio: $\Delta t = 1$ giorno

un passo di tempo: $I(t+\Delta t) := I(t) + \Delta t \cdot I'(t)$

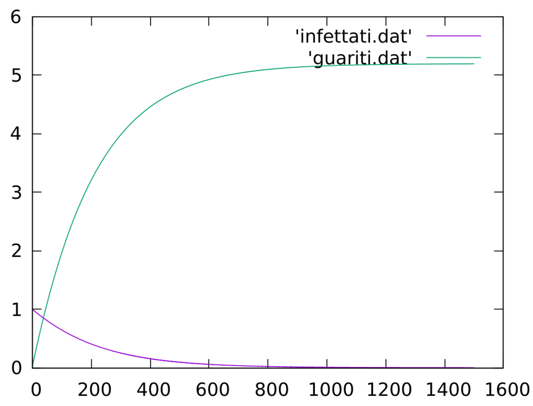
$$I'(t) = R_0 S(t) I(t) - \gamma I(t)$$

$$S(t+\Delta t) = S(t) + \Delta t \cdot S'(t)$$
$$G(t+\Delta t) = G(t) + \Delta t \cdot G'(t)$$

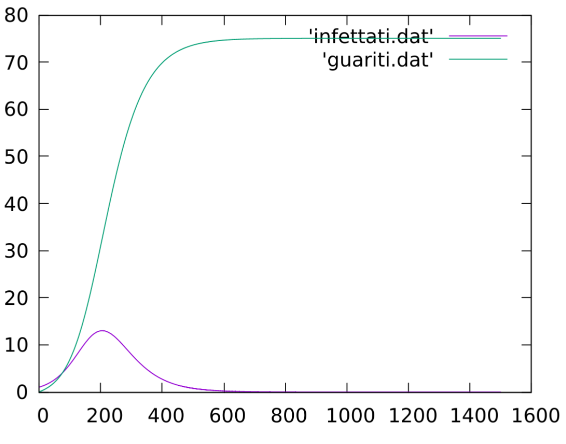
e iterare. ($\rightsquigarrow$ link per Khan Academy su Ariel)



← per $R_0 = 3$: al "peak" della pandemia 50% della popolazione sono malati! La pandemia finisce quando 100% hanno preso il virus e sono guariti.



← per $R_0 = 0.5$ (dal primo giorno) il virus si ferma senza causare un'epidemia.



← per $R_0 = 1.1$: al "peak" ci sono 12% della popolazione infettati (#flattenthecurve) e la pandemia si ferma quando circa 75% hanno preso il virus e sono guariti (25% non prendono mai il virus — immunità di gregge!)

```c
int steps = (int) (TMAX / DT);
for (int i =0; i < steps; i++) {
    INew = IOld + DT*(  RZERO*IOld*(NTOTAL - IOld - GOld) - GAMMA*IOld  );
    GNew = GOld + DT*(  GAMMA*IOld  );

    fprintf(file1,"%.10lf\n", INew);
    fprintf(file2,"%.10lf\n", GNew);

    IOld = INew;
    GOld = GNew;
    }
system("gnuplot -p 'script.gp'");
```

script.gp

```
plot 'infettati.dat' with lines, 'guariti.dat' with lines
```