Soluzione Esercizio III

Problema 1:

Dimostrazione: punti principali a lezione (settimana scorsa), adesso i dettagli:

Criterio di invertibilità $\Rightarrow f^{-1}$ esiste e va da $[f(a), f(b)]$ a $[a,b]$.
In particolare: f^{-1} assume tutti i valori in $[a,b]$.

f strettamente crescente significa: $\forall x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$.

Usiamo un argomento per contraddizione per dimostrare che anche f^{-1} è strett. crescente:

Sia $y_1 < y_2$. Assumiamo $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$.
Siccome f è crescente: $\Rightarrow \underbrace{f(f^{-1}(y_1))}_{= y_1} \geq \underbrace{f(f^{-1}(y_2))}_{= y_2}$.

Allora, per contraddizione, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Siccome f^{-1} è strett. crescente, può avere solo le discontinuità di prima specie: salti. Ma è veramente possibile? Vediamo!

Cos'è esattamente un salto? È un punto y_0 tale che:

$$\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) \neq \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y).$$

Per successioni sappiamo (capitolo sui teoremi di confronto, semestre scorso):

(*) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, e $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $a \geq b$.

Per qualsiasi successione $y_n \to y_0$, $y_n < y_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = \lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y).$$

Per qualsiasi successione $\tilde{y}_n \to y_0$, $\tilde{y}_n > y_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(\tilde{y}_n) = \lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y).$$

Siccome f^{-1} è strett. crescente: $f^{-1}(y_n) \le f^{-1}(\tilde{y}_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Allora

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) \overset{\text{usato }(*)}{\le} \lim_{n\to\infty} f^{-1}(\tilde{y}_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = \lim_{y\to y_0-} f^{-1}(y), \qquad \lim_{n\to\infty} f^{-1}(\tilde{y}_n) = \lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y).$$

Se abbiamo "=", non è un salto.

Allora pensiamo a $\lim_{y\to y_0-} f^{-1}(y) < \lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y)$.

Come visto nella dimostrazione del teorema sul limite delle funzioni monotone:

$$\lim_{y\to y_0-} f^{-1}(y) = \sup\{f^{-1}(y) : y < y_0\}$$

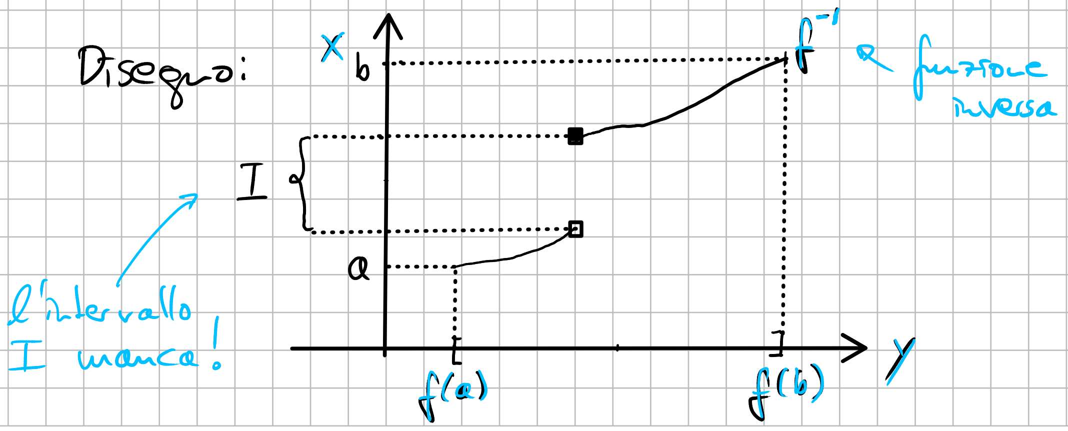
$$\lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y) = \inf\{f^{-1}(y) : y > y_0\}.$$

Allora la funzione f^{-1} non assume i valori nel intervallo $I := [\lim_{y\to y_0-} f^{-1}(y), \lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y)]$. Ma non è possibile perché abbiamo già visto che

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$$

assume tutti i valori in $[a,b]$, non può mancare l'intervallo $I \subset [a,b]$.

Disegno:



Problema 2:

a) $f(x) = x^3$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Continuità: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Oppure: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x$ con $|x - x_0| < \delta : \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Sia $\varepsilon > 0$.
$$|x^3 - x_0^3| = |x^3 - x_0^2 x + x_0^2 x - x_0^3|$$
$$= |x|\,|x^2 - x_0^2| + x_0^2 |x - x_0|$$
$$= |x|\,|x - x_0|\,|x + x_0| + x_0^2 |x - x_0|$$
$$= |x - x_0| \left(|x|\,|x + x_0| + x_0^2 \right)$$
$$\leq |x - x_0| \left(|x|^2 + |x|\,|x_0| + x_0^2 \right).$$

Se $|x - x_0| < \delta$ e $\delta < |x_0|$ otteniamo: $|x| < 2|x_0|$

$$\Rightarrow \underbrace{|x^3 - x_0^3|}_{\text{vogliamo ottenere: } < \varepsilon} \leq \underbrace{|x - x_0|}_{<\delta,\ \delta \text{ suffic. piccolo}} \underbrace{\left(4x_0^2 + 2x_0^2 + x_0^2\right)}_{= 7x_0^2}$$

$|x - x_0| < \delta$

(1) $x > x_0$:
$x - x_0 < \delta$
$x < x_0 + \delta$
$< 2|x_0|$

(2) $x_0 > x$:
$x_0 - x < \delta$

tutte le possibilità ...
$x > 0$, $x < 0$,
$x_0 > 0$, $x_0 < 0$
...

Poniamo $\delta := \min\left\{ |x_0|, \dfrac{\varepsilon}{7x_0^2} \right\}$.

allora:
$$|x^3 - x_0^3| < \frac{\varepsilon}{\cancel{7x_0^2}} \cancel{7x_0^2} = \varepsilon.$$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Sia $x_n \longrightarrow 0$, $x_n \neq 0$.

Allora $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x)$ esiste ed è $= 0$.

- Sia $x_n \to 0$ con $x_n \neq 0$.

Allora $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

Con $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \in [-1,1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$-x_n \leq x_n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq x_n.$$

Teorema dei carabinieri: $\lim_{n\to\infty} x_n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

- $f(g(x_n)) = f\left(x_n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)$

Cercare $x_n \longrightarrow 0$.

Per esempio: $x_n = \frac{1}{2\pi n}$. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \operatorname{sen}(2\pi n) = 0$.

$\Rightarrow f(g(x_n)) = f(0) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(g(x)) = 0$ non è possibile.

Teoremi:

(1) Se g, f sono continue, allora $f(g(x))$ è continua.

La funzione f non è continua!

(2) Sia $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0} f(y) = \ell$, ed esiste un intorno I di x_0 tale che $g(x) \neq y_0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, allora $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \ell$.

invece l'esempio qui:

$$\boxed{g(x_n) = 0 \quad (=y_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Non applica perché un intorno di questo tipo non esiste.

Problema 3: Se f è pari, la derivata f' è dispari.

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ Sia f pari, $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

La derivata è: $f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$

$f(-x+h) = f(-(x-h)) = f(x-h)$

$\overset{f \text{ è pari}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \overset{\tilde{h}=-h}{=} \lim_{\tilde{h}\to 0} \frac{f(x+\tilde{h}) - f(x)}{-\tilde{h}}$

$= -\lim_{\tilde{h}\to 0} \frac{f(x+\tilde{h}) - f(x)}{\tilde{h}} = -f'(x)$.

Problema 4i

a) La funzione $f(x) = x|x|$ ammette per $x=0$ la derivata prima, ma non la seconda.

Soluzione:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h|h| - \cancel{0|0|}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} |h| = 0.$$

Il limite esiste e $f'(0) = 0$.

Derivata seconda: $$\lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - \overset{=0}{f'(0)}}{h} \quad (*)$$

Per $h>0$: $f(h) = h|h| = h^2 \Rightarrow f'(h) = D h^2 = 2h.$

Per $h<0$: $f(h) = -h^2 \Rightarrow f'(h) = -2h.$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f'(h) - \cancel{f'(0)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{2h}{h} = 2.$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f'(h)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}} = -2.$$

$\Rightarrow$ Il limite $(*)$ non esiste.

b) Derivata di $f(x) := \frac{1}{x}$.

Prima:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} - \frac{\cancel{h}}{x(x+h)\cancel{h}} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)}$$

$$= - \frac{1}{\lim_{h\to 0} x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \qquad \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Seconda:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{(x+h)^2} + \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2 (x+h)^2} \right) = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2xh - h^2}{x^2 (x+h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \, \frac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{x^2(x+h)^2} = \frac{\lim_{h\to 0}(2x+h)}{\lim_{h\to 0} x^2(x+h)^2} = \frac{2x}{x^4} = 2\frac{1}{x^3}.$$

■

c) $g(x) = (\mathrm{sen}(x))^2 + x^2.$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(x)\right) + \frac{d}{dx}x^2$$

$$= \frac{d\,\mathrm{sen}(x)}{dx}\cdot \mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x)\frac{d\,\mathrm{sen}(x)}{dx} + 2x$$

$$= \cos(x)\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x)\cos(x) + 2x$$

$$= 2\left(\cos(x)\,\mathrm{sen}(x) + x\right).$$

$$\frac{d^2g(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\,2\left(\underline{\cos(x)\,\mathrm{sen}(x)} + x\right)$$ regola per il prodotto

$$= 2\frac{d\cos(x)}{dx}\,\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x)\underbrace{\frac{d\,\mathrm{sen}(x)}{dx}}_{=\cos(x)} + 2$$

formula di addizione + limite del rapporto incrementale $\Rightarrow \dfrac{d\cos(x)}{dx} = -\mathrm{sen}(x)$ } come fatto a lezione per $\dfrac{d\,\mathrm{sen}(x)}{dx}$.

$$\frac{d^2g(x)}{dx^2} = 2(-\mathrm{sen}(x))\mathrm{sen}(x) + 2\cos^2(x) + 2$$

$$= 2\left(-\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) + 1\right)$$

$\boxed{\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1}$

$$= 4\cos^2(x).$$

$-\mathrm{sen}^2(x) = \cos^2(x) - 1$

■

LEZIONE

Teorema: (derivate delle funzioni composte)

Se g è una funzione derivabile in x, e f è una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile in x e

$$D(f(g(x))) = (Df)(g(x))\,Dg(x) = f'(\underline{g(x)})\,g'(x)$$

$$= \frac{df}{dg}(\underline{g(x)})\,\frac{dg}{dx}(x).$$

f' nel punto $g(x)$

Esempio: $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) = g(h(x))$

se poniamo $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, $h(x) = x^2$.

Teorema $\Rightarrow$ $f'(x) = g'(h(x))\, h'(x)$.

$g'(x) = \cos(x)$, $h'(x) = 2x$.

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(\underline{h(x)}) \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Dimostrazione (parziale):

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Già visto: g derivabile in x $\Rightarrow$ g continua in x

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} g(x+h) - g(x) = 0.$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \, \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x) + (g(x+h) - g(x))) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{\underbrace{g(x+h) - g(x)}_{=:\,\tilde h} \to 0} \frac{f(g(x) + \tilde h) - f(g(x))}{\tilde h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

(La dimostrazione è valida se $g(x+h) \neq g(x)$ per tutti valori di $h \neq 0$ in un intorno di zero.)

$g(x+h) - g(x) = 0$

Soluzione di questo problema: Libro p. 126.

Dimostrazione di $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$:

Esercizio III: per $k(x) = \frac{1}{x}$: $k'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Identità: $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\, k(g(x))$.

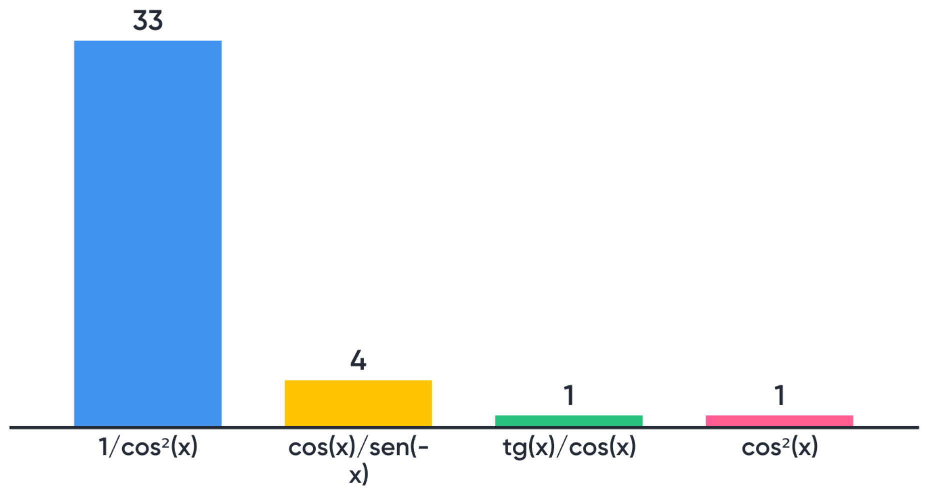
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x)\,k(g(x)) + f(x)\,D(k(g(x)))$$
$$= f'(x)\,k(g(x)) + f(x)\,k'(g(x))\,g'(x)$$

Ci ricordiamo: $k'(x) = -\frac{1}{x^2}$, allora $k'(g(x)) = -\frac{1}{g(x)^2}$.

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x)\underbrace{k(g(x))}_{=\frac{1}{g(x)}} + f(x)\left(-\frac{1}{g(x)^2}\right)g'(x)$$
$$= \frac{f'(x)\,g(x)}{g(x)\,g(x)} - \frac{f(x)\,g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}.$$

MENTI

La derivata di tg(x) = sen(x)/cos(x) è



Soluzione: $D\,tg(x) = D\,\frac{sen(x)}{cos(x)}$ regola per il quoziente

$$= \frac{(D\,sen(x))\,cos(x) - sen(x)\,(D\,cos(x))}{cos^2(x)}$$

$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

$$= \frac{cos^2(x) - sen(x)\,(-sen(x))}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}.$$

Ci ricordiamo: Una funzione strettamente crescente

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ed è invertibile. Se f è anche continua, la funzione inversa f^{-1} è definita su $[f(a), f(b)]$.

$\boxed{\text{Teorema:}}$ Sia f strettamente crescente (o decrescente) in $[a,b]$. Se f è derivabile in $x \in (a,b)$ e se $f'(x) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$, e

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $y = f(x) = x^2$ è continua e strettamente crescente per $x > 0$.

La funzione inversa è $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Abbiamo già visto $f'(x) = 2x$.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow D\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

■