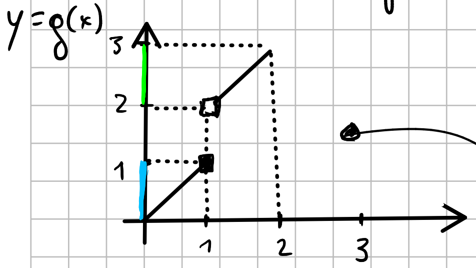
Teorema (Criterio di invertibilità)

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a,b]$ è invertibile in tale intervallo.

⚠ Una funzione strettamente monotona è sempre invertibile.
La cosa importante: $f : [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$
e $f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$.



$g : [0,2] \longrightarrow [0,1] \cup (2,3] \neq [0,3]$.

Dimostrazione: Caso in cui f è strettamente crescente:

$$f(a) < f(x) < f(b) \qquad \forall x \in (a,b).$$

Quindi $f(a)$ è il minimo, $f(b)$ il massimo.
Teorema precedente: f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Cioè: $\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x \in [a,b] : f(x) = y$.

Tale x è unico: infatti non è possibile avere due valori distinti $x_1 < x_2$ con $f(x_1) = y = f(x_2)$ perché f strettamente crescente significa: $f(x_1) < f(x_2)$. $\blacksquare$

Teorema (sul limite delle funzioni monotone)

Sia f una funzione monotona in $[a,b]$. Allora esistono (e sono finiti) i limiti destri e sinistri:

$$\lim_{x \to a+} f(x), \quad \lim_{x \to b-} f(x), \quad \lim_{x \to x_0+} f(x), \quad \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

per ogni $x_0 \in (a,b)$.

⚠ L'ipotesi sono solo "f monotona".

<u>In altre parole:</u> una funzione monotona può avere le discontinuità di prima specie (salti) ma <u>non</u> di seconda specie.

Dimostrazione: Consideriamo il caso di una funzione crescente.

Allora $f(a)$ è il minimo e $f(b)$ il massimo.

Sia $x_0 \in (a,b]$. Poniamo

$$\ell := \sup\{f(x) : x \in [a,x_0)\}.$$

Ovviamente $\ell < f(b)$, allora ℓ è finito.

Usiamo il metodo di ε e δ per dimostrare che ℓ è il limite sinistro in x_0.

Sia $\varepsilon > 0$.

Per la proprietà dell'estremo superiore esiste un $\tilde{x}_0 \in [a, x_0)$ tale che: $\ell - \varepsilon < f(\tilde{x}_0)$

Poniamo $\delta := x_0 - \tilde{x}_0$.

Così otteniamo:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies x \in (\tilde{x}_0, x_0).$$

Siccome f è crescente:

$$x \in (\tilde{x}_0, x_0) \implies \underset{\underset{\ell-\varepsilon}{\vee}}{f(\tilde{x}_0)} \le f(x) \le \underset{\underset{\ell}{\shortparallel \wedge}}{f(x_0)}$$

Abbiamo ottenuto:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell).$$

Questo è esattamente l'esistenza del limite sinistro. ∎

Teorema di continuità delle funzioni inverse:

Sia f una funzione strettamente monotona in $[a,b]$. Se f è continua, anche la funzione inversa f^{-1} è continua.

Esempio: Se sappiamo solo continuità della funzione

$$f(x) = e^x, \quad f: (-\infty, \infty) \longrightarrow (0, +\infty)$$

per il teorema otteniamo continuità del logaritmo

$$f^{-1}(x) = \ln(x), \quad f^{-1}: (0, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$$

Dimostrazione: Il teorema "criterio di invertibilità" implica (per il caso di f crescente):

$f: [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ ed esiste

$f^{-1}: [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$.

In particolare: f^{-1} assume tutti i valori in $[a,b]$.

Anche f^{-1} è una funzione strettamente monotona. Controllare!

Il teorema precedente $\Rightarrow$ se f^{-1} ha una discontinuità, è di prima specie ("un salto").

Ma un salto non è possibile perché f^{-1} assume tutti i valori in $[a,b]$. ■

La fine del capitolo su continuità.

Derivate

Esempio: Una macchina che percorre una strada. Indichiamo con $s(t)$ la distanza percorsa in funzione del tempo t.

Tasso medio di accrescimento di s da un certo instante t ed un altro $t+h$:

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

$s(t+h) = 200\,km$
$s(t) = 0\,km$
$h = 2$ ore

$$\frac{200\,km - 0\,km}{2 \text{ ore}} = 100\,\frac{km}{h}.$$

In parole più comuni, questo è la velocità media nell'intervallo $[t, t+h]$.

Cos'è la velocità instantanea?

$$v(t) := \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

tasso di accrescimento instantaneo

Come calcolare questa velocità?

Se pensiamo di s continua: $\lim_{h\to 0}\left(s(t+h)-s(t)\right) = 0$.

è una espressione di tipo "$\frac{0}{0}$"!

Ma per "funzione buone" si può, per esempio: $s(t) = t^2$.

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^2-t^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{t^2}+2th+h^2-\cancel{t^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2t\cancel{h}+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0}(2t+h) = 2t.$$

La velocità al tempo t è: $v(t) = 2t$.

Definizione: Sia f una funzione definita nell'intervallo (a,b), e sia $x \in (a,b)$.

Si dice che f è <u>derivabile</u> nel punto x se esiste (ed è finito) il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Tale limite si chiama <u>la derivata di f in x.</u>

Notazione: $f'(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$, o $Df(x)$.

f è derivabile <u>nell'intervallo aperto (a,b)</u> se è derivabile in ogni punto $x \in (a,b)$.

Esempi: <u>La funzione costante:</u> $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0. \quad (*)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0.$$

<u>La funzione lineare:</u>

$f(x) = mx$ con $m \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h)-mx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{mx}+mh-\cancel{mx}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{m\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} m = m.$$

$$\Rightarrow f'(x) = m.$$

Indefinita: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ con $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0+} x = 0$$

Problema centrale: "Quale funzione tende ad zero più velocemente, f o g?"

<u>Invece</u> in $(*)$:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{0}{x} = \lim_{x \to 0+} 0 = 0.$$

$$\frac{0}{x} = 0$$

La funzione $f(x) = |x|$:

È derivabile per $x \neq 0$, ma non in $x = 0$.

Infatti:
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Ma
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1, \\ \text{e } \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1. \end{array}\right] \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \text{ non esiste.}$$

$\Rightarrow$ La funzione f non è derivabile in $x = 0$, $f'(0)$ non esiste.

⚠ f è continua ma non è derivabile.

Teorema Ogni funzione derivabile in x è anche continua in x.

Dimostrazione: Sia f derivabile in x.

Allora $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ esiste $\left(= f'(x) \in \mathbb{R}\right)$.

Ma adesso
$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} \left(f(x) + f(x+h) - f(x)\right)$$
$$= f(x) + \lim_{h\to 0} \left(f(x+h) - f(x)\right)$$
$$= f(x) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h$$
$$= f(x) + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h$$
$$= f(x) + f'(x) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} h}_{=0} = f(x).$$

$\blacksquare$

Definizione: Se f è derivabile in (a,b) allora la sua derivata f' è una funzione in (a,b). Se la funzione f' è a sua volta derivabile, diremo che la sua derivata $(f')'$ è la <u>derivata seconda di f</u>.

<u>Notazione:</u> f'', $\frac{d^2f}{dx^2}$, o D^2f

Esempio: La macchina. Abbiamo già visto: se la distanza è $s(t)=t^2$, la velocità al tempo t è $v(t)=s'(t)=2t$.

La derivata seconda è il tasso di accrescimento della velocità (oppure l'accelerazione):

$$a(t)=v'(t)=s''(t)=2.$$

Teorema: Operazioni con le derivate

Se f e g sono due funzioni derivabili in x, allora sono derivabili in x anche la somma, la differenza, il prodotto, e il quoziente se il denominatore è diverso da zero.

Si ha le regole:

$$(f+g)'=f'+g' \quad e \quad (f-g)'=f'-g'.$$

$$(fg)'=f'g+fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2} \quad (\text{se } g\neq 0!)$$

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ **per $(f+g)' = f' + g'$:**

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h) + g(x+h)\big) - \big(f(x) + g(x)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big) + \big(g(x+h) - g(x)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

per $(fg)' = f'g + fg'$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \overbrace{- f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}^{\text{inserito lo zero}} - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\,\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{= f'(x)} \; \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{= g(x)} + f(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{= g'(x)}$$

(una funzione derivabile è anche continua!)

$$= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

per il quoziente: dopo.

$\blacksquare$

Esempio: Un'altra dimostrazione per $s(t)=t^2$ ha derivata $s'(t)=2t$.

$$s'(t) = (t^2)' = (t\cdot t)' = \underbrace{t'}_{=1}\cdot t + t\cdot \underbrace{t'}_{=1}$$

$$= t + t = 2t.$$

Esempio: $f(x) = \operatorname{sen}(x)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h}$$

formula di addizione

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{h}$$

$$= \operatorname{sen}(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}}_{=0} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}}_{=1} \cos(x)$$

(→ capitolo sui limiti)

$$= \cos(x). \qquad \Longrightarrow \qquad D\operatorname{sen}(x) = \cos(x).$$

$g(x) = x\operatorname{sen}(x)$:

$$Dg(x) = (Dx)\cdot \operatorname{sen}(x) + x\, D\operatorname{sen}(x)$$

$$= 1 \cdot \operatorname{sen}(x) + x\cos(x)$$

$$= \operatorname{sen}(x) + x\cos(x).$$