Soluzione Esercizio II

Problema 1: $\boxed{\text{Dimostrazione:}}$

Consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$.

Dobbiamo dimostrare:

$$\forall y_0 \in [f(a), f(b)] \ \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = y_0 .$$

Sia $y_0 \in [f(a), f(b)]$.

Se $y_0 = f(a)$: una soluzione è $x_0 = a$.

Se $y_0 = f(b)$: basta prendere $x_0 = b$.

Se $y_0 \in (f(a), f(b))$ consideriamo la funzione

$$g(x) := f(x) - y_0 .$$

$y_0 > f(a)$ implica:

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0$$

$f(b) > y_0$ implica:

$$g(b) = f(b) - y_0 > 0 .$$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $g(x_0) = 0$.

Cioè $f(x_0) = y_0$.

■

Problema 2:

$\boxed{a}$ Soluzione: Seconda specie significa:

$\lim_{x \to x_0-} f(x_0)$ o $\lim_{x \to x_0+} f(x_0)$ non esiste o è $\pm\infty$.

Per esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 42 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ seconda specie

oppure

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0-} g(x)$ non esiste.

$\Rightarrow$ seconda specie

Altro esempio: $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0+} h(x) = +\infty$

(oppure $\lim_{x \to 0-} h(x) = +\infty$)

$\Rightarrow$ seconda specie

Oppure:

$$i(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{\cos(x)} & \text{se } x > 0 \\ 5 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-} i(x) = 5$$

$\begin{cases} \lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0+} \cos(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Si può usare il teorema sul limite del quoziente.

$$\lim_{x \to 0+} i(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(x)}{\cos(x)} = -\infty$$

$\Rightarrow$ la discontinuità è di seconda specie.

$\boxed{b}$ $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{\text{sen}(x-1)}$. In tutti i punti x con $\text{sen}(x-1) \neq 0$ si può usare il teorema su continuità del quoziente.

$\Rightarrow$ I punti da studiare sono solo i punti dove $\text{sen}(x-1) = 0$:

$$x_0 \in \{1, 1+\pi, 1+2\pi, 1+3\pi, \ldots\}$$

Per ogni x_0 in questo insieme: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ può esistere solo se $\lim_{x \to x_0} (2x^2 - 6x + 4) = 0$.

(In punti dove $\lim_{x \to x_0} (2x^2 - 6x + 4) = a \neq 0$ il teorema sul limite del quoziente dice: $\lim_{x \to x_0 -} \frac{(2x^2-6x+4)}{\text{sen}(x-1)} = \text{"}\frac{a}{0}\text{"} = +\infty$ oppure $-\infty$.

Se limite sinistro è infinito, non esiste un prolungamento continuo.)

Per la continuità di $2x^2 - 6x + 4$:

$$\lim_{x \to x_0} (2x^2 - 6x + 4) = 2x_0^2 - 6x_0 + 4.$$

Soluzioni di $2x_0^2 - 6x_0 + 4 = 0$: $x_0 \in \{1, 2\}$.

Infatti $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$

Allora $2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2)$.

Per $x_0 = 1 + \pi$: $\displaystyle\lim_{x \to 1+\pi} \frac{2(x-1)(x-2)}{\operatorname{sen}(x-1)}$

$$2(x-1)(x-2) \longrightarrow 2\pi(\pi-2) > 0.$$

$$\operatorname{sen}(x-1) \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to (1+\pi)^-} \frac{2(x-1)(x-2)}{\operatorname{sen}(x-1)} = -\infty, \quad \lim_{x \to (1+\pi)^+} \frac{2(x-1)(x-2)}{\operatorname{sen}(x-1)} = +\infty.$$

$\Rightarrow$ Non esiste un prolungamento continuo in $x_0 = 1+\pi$.

La stessa cosa per $x_0 \in \{1+2\pi, 1+3\pi, 1+4\pi \dots\}$.

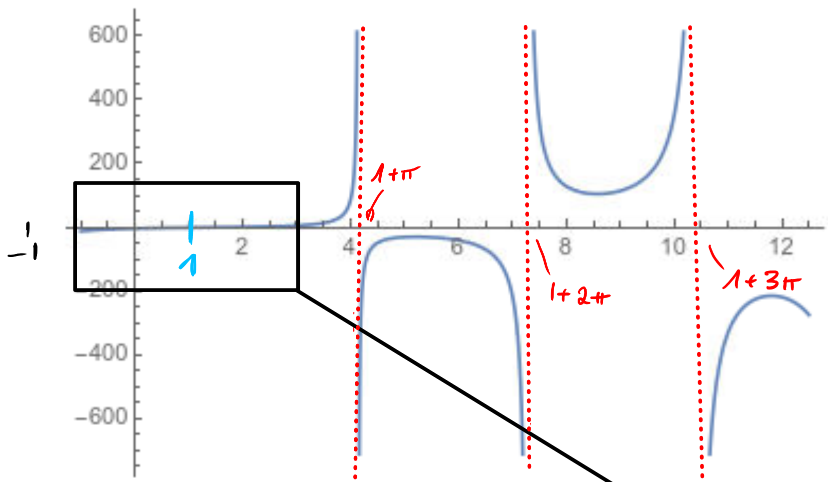
Per $x_0 = 1$:

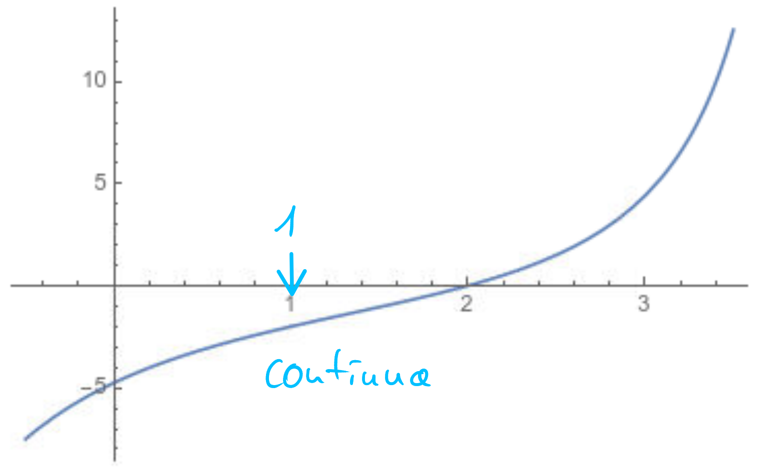
$$\lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x-2)}{\operatorname{sen}(x-1)} = 2 \underbrace{\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\operatorname{sen}(x-1)}}_{=1} \underbrace{\lim_{x \to 1} (x-2)}_{=-1} = -2.$$

(per continuità di $x-2$)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\operatorname{sen}(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)} \overset{\text{teorema sul quoziente}}{=} \frac{1}{\lim_{x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

La funzione ha un prolungamento continuo nel punto $x_0 = 1$.





c

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{se } x \geq 0 . \end{cases}$$

La funzione è ovviamente continua per ogni $x_0 \neq 0$.
Il punto $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (ax^2 + bx + c)$$

$$= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c.$$

Per avere una funzione continua dobbiamo avere

$$0 = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = c$$

$\Rightarrow$ Per $c = 0$ la funzione è continua.
Per a e b sono permesso tutti numeri reali.

d $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} \overset{?}{=} \frac{\lim_{x \to +\infty} (x+1)}{\lim_{x \to +\infty} (x-1)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$ non è definito così!

Invece:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(1 + \frac{1}{x})}{\cancel{x}(1 - \frac{1}{x})} = \frac{\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})}{\lim_{x \to \infty} (1 - \frac{1}{x})}$$

$$= \frac{1 + \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}_{=0}}{1 - \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}_{=0}} = \frac{1}{1}$$ è definito $(=1)$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 1$?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} \cdot \frac{1}{x}}{\cancel{x^2}(1 + \frac{1}{x^2})} = \frac{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x^2})}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$ è definito.

LEZIONE 5

Teorema di Weierstrass:

Sia f una funzione continua, definita in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora f assume massimo e minimo in $[a,b]$, che vuol dire: esistono in $[a,b]$ punti x_{min} e x_{max} tali che

$$f(x_{min}) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

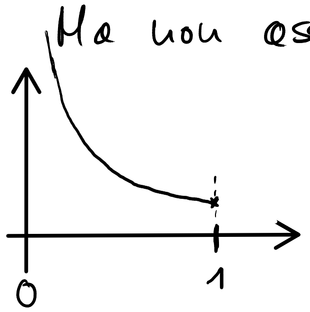
e

$$f(x_{max}) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Definizione: Si chiama x_{min} un punto di minimo e x_{max} un punto di massimo. Si chiama $m := f(x_{min})$ il minimo e $M := f(x_{max})$ il massimo di f in $[a,b]$.

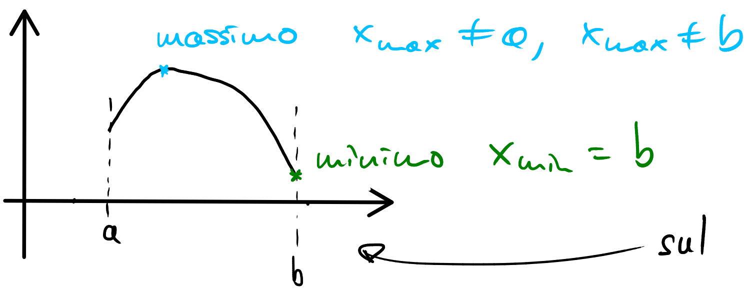
Esempi: L'intervallo deve esser chiuso I:

$f(x) = \frac{1}{x}$ con dominio $(0,1]$ è continua.
non chiuso!
Ma non assume massimo!



Non è limitata superiormente vicino ad $x=0$.

Una funzione con massimo e minimo:

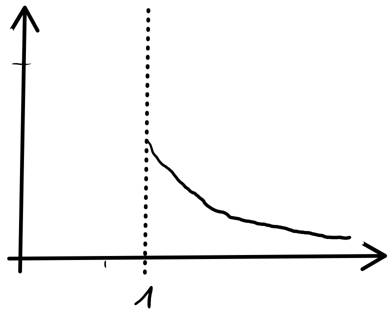


sul intervallo chiuso $[a,b]$.

L'intervallo deve essere chiuso II:

$f(x) = \frac{1}{x}$ con dominio $[1, +\infty)$

f assume un massimo
($\text{nel punto } x_{max} = 1$)
ma non assume un minimo!



È limitata inferiormente da $y=0$ ma non esiste nessun punto x_{min} con $f(x_{min}) = 0$.

(L'estremo inferiore esiste ed è zero: $\inf \{ f(x) : x \in [1, +\infty) \} = 0$.)

L'intervallo deve essere chiuso III:

$f(x) = \frac{1}{x}$ con dominio $[1, 2]$ assume il massimo in $x_{max} = 1$ e il minimo in $x_{min} = 2$.

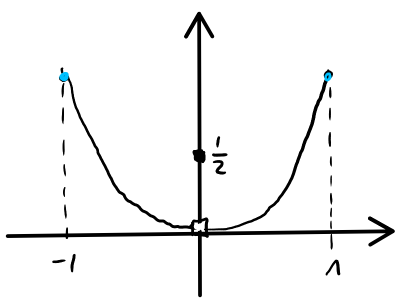
La funzione deve essere continua:

$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$ ← Attenzione!

con dominio $[-1, 1]$ non è continua in $x_0 = 0$.
La funzione assume il massimo in

$$x_{max,1} = -1 \quad e \quad x_{max,2} = 1.$$

La funzione non assume il minimo!



Si avvicina ad $y = 0$ se $x \to 0$ ma non esiste nessun punto x_{min} con $f(x_{min}) = 0$.

del teorema di Weierstrass

Dimostrazione: Poniamo $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ che può essere anche $+\infty$.

(L'estremo superiore esiste sempre se permettiamo $+\infty$.)

Costruiamo una successione x_n con $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$.

La costruzione è come segue:

(1) Se $M = +\infty$: per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) > n$ (usando la definizione di estremo superiore). Cioè $f(x_n) \longrightarrow +\infty$ per $n \to \infty$.

(2) Se $M \in \mathbb{R}$: Usiamo la definizione di estremo superiore: per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$ e $f(x_n) \leq M$.

Allora $f(x_n) \longrightarrow M$. Qui abbiamo usato: l'intervallo è <u>limitato.</u>

Abbiamo $a \leq x_n \leq b$, allora la successione è limitata.

Se vediamo una successione limitata: "sempre" si usa il teorema di Bolzano-Weierstrass!

dal primo semestre

<u>teorema di Bolzano-Weierstrass:</u>

Sia x_n una successione limitata. Allora esiste una successione estratta x_{n_k} che converge.

$\Rightarrow$ esiste una successione estratta $x_{n_k} \longrightarrow x_0$ per un punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

$x_{n_k} \in [a,b]$ implica $x_0 \in [a,b]$.

Qui abbiamo usato: l'intervallo è <u>chiuso.</u>

(Se $x_{n_k} \in (a,b)$ possiamo dire solo $x_0 \in [a,b]$ chiuso ma non possiamo dire $x_0 \in (a,b)$. Esattamente per questo il teorema non si applica per $f(x) = \frac{1}{x}$ su $(0,1]$.)

Abbiamo trovato una successione x_{n_k} tale che:

$$x_{n_k} \longrightarrow x_0 \quad e \quad x_0 \in [a,b] \quad e \quad f(x_{n_k}) \longrightarrow M.$$

Adesso usiamo continuità:

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(x_0).$$

Allora abbiamo costruito un punto $x_0 \in [a,b]$
tale che $f(x_0) = M$.

"$+\infty$" non è un valore permesso per una funzione!
$\Rightarrow f(x_0) < +\infty \quad \Rightarrow M < +\infty.$ ∎

Seconda formulazione del teorema dell'esistenza dei valori intermedi:

Una funzione continua in un intervallo chiuso assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.

Dimostrazione: Combinazione della prima formulazione e il teorema di Weierstrass. ∎