Soluzione Esercizi 1 (di 11 marzo 2020)

Problema 1:

(1) $\forall x_n \to x_0$ con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$: $f(x_n) \longrightarrow +\infty$

(2) $\forall M>0\ \exists \delta>0$: $|x-x_0|<\delta$ e $x\in A\setminus\{x_0\} \Rightarrow f(x)>M$.

Dimostrazione: "(2) $\Rightarrow$ (1)":

Sia x_n una successione con $x_n \longrightarrow x_0$, e $x_n \in A\setminus\{x_0\}$.

Dobbiamo usare (2) per dimostrare: $f(x_n) \longrightarrow +\infty$.

Cosa significa $f(x_n)\longrightarrow +\infty$?

$$\forall M>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ n>N \Rightarrow f(x_n)>M.$$

Usiamo (2) come segue:

Sia $M>0$. $\exists\ \delta>0$ tale che: $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$

Ma siccome $x_n \longrightarrow x_0$:

$$\exists N\in\mathbb{N} \text{ con: } n>N \Rightarrow |x_n-x_0|<\delta.$$

Abbiamo dimostrato: $n>N \Rightarrow f(x_n)>M$.

"(1) $\Rightarrow$ (2)" è la stessa cosa come $\neg(2)\Rightarrow\neg(1)$.

(en.wikipedia.org/wiki/Contraposition)

(2): $\forall M>0\ \exists\delta>0$: $\forall x$ con $|x-x_0|<\delta$ e $x\in A\setminus\{x_0\}$: $f(x)>M$.

$\neg$(2): $\exists M>0\ \forall\delta>0$ $\exists x$ con $|x-x_0|<\delta$ e $x\in A\setminus\{x_0\}$: $f(x)\le M$.

Un M di questo tipo esiste. Lo chiamiamo M_0.

Per $n\in\mathbb{N}$ scegliamo $\delta=\frac{1}{n}$:

$\neg$(2) dice: per $\delta=\frac{1}{n}$ esiste un x con $|x-x_0|<\frac{1}{n}$ e $x\in A\setminus\{x_0\}$ tale che: $f(x)\le M_0$.

Lo chiamiamo x_n.

Allora abbiamo costruito una successione x_n con $f(x_n)\le M_0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$: $f(x_n) \not\longrightarrow +\infty$.

Abbiamo dimostrato: "$\exists x_n \to x_0$ con $x_n\in A\setminus\{x_0\}$: $f(x_n)\not\to+\infty$."

Questo è esattamente $\neg$(1). ■

Problema 2: $g : X \to Y$ e $f : Y \to \mathbb{R}$

con $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ e $\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$,

ed esiste un intorno $I \ni x_0$ tale che: $g(x) \neq x_0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$.

Allora:
$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell.$$

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare: $\forall x_n \to x_0 : f(g(x_n)) \to \ell$.

Sia x_n una successione con $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$.

$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ significa: $g(x_n) \longrightarrow y_0$.

Esiste $I = (a,b)$ con $a < x_0 < b$.

Siccome $x_n \to x_0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$: $n > N \Rightarrow x_n \in I$.

Come detto: per $n > N$: $g(x_n) \neq y_0$.

Allora, la successione $y_n := g(x_n)$ soddisfa le assunzioni del limite $\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$: $y_n \to y_0$ e $y_n \neq y_0$.

Allora $f(g(x_n)) = f(y_n) \longrightarrow \ell$. $\blacksquare$

Problema 3:

a Il limite di $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to 0$ non esiste.

Soluzione:

$$x_n := \frac{1}{2\pi n}$$

abbiamo: $x_n \neq 0$, $x_n \longrightarrow 0$

$$\text{e} \quad f(x_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi n}\right)}\right) = \operatorname{sen}(2\pi n) = 0$$

$$\tilde{x}_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad : \quad \tilde{x}_n \neq 0, \; x_n \longrightarrow 0$$

$$\text{e} \quad f(\tilde{x}_n) = \operatorname{sen}\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1.$$

Allora: $f(x_n) \longrightarrow 0$, $f(\tilde{x}_n) \longrightarrow 1$.

$\boxed{b}$ $f(x) = |x| \sin(x)$ non ha un limite per $x \to +\infty$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$ $x_n := 2\pi n$: $f(x_n) = |2\pi n| \underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\tilde{x}_n := 2\pi n + \frac{\pi}{2}$: $f(\tilde{x}_n) = |2\pi n + \frac{\pi}{2}| \underbrace{\sin(2\pi n + \frac{\pi}{2})}_{= \sin(\frac{\pi}{2}) = 1}$

$x_n \longrightarrow +\infty$

$\tilde{x}_n \longrightarrow +\infty$ $\qquad = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \longrightarrow +\infty$.

$\boxed{c}$ Sia $a > 0$. Il limite $\lim_{x \to a} \sqrt{x}$ esiste? Usa ε e δ.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$ Indovinare: $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} = \ell$.

$$|\sqrt{a} - \sqrt{x}| = |\sqrt{a} - \sqrt{x}| \frac{|\sqrt{a} + \sqrt{x}|}{|\sqrt{a} + \sqrt{x}|}$$

(trucco importante)

$$= |(\sqrt{a} - \sqrt{x})(\sqrt{a} + \sqrt{x})| \frac{1}{|\sqrt{a} + \sqrt{x}|}$$

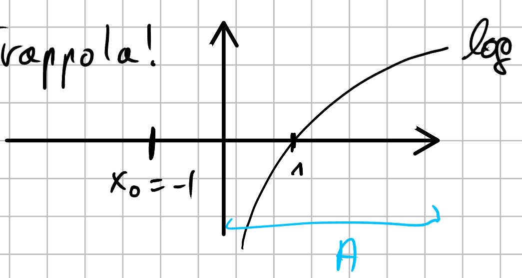
$$= |a - x| \frac{1}{\sqrt{a} + \underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0}} \leq |a - x| \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\delta := \sqrt{a}\,\varepsilon$. Allora:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{a} - \sqrt{x}| \leq |a - x| \frac{1}{\sqrt{a}} < \cancel{\sqrt{a}}\,\varepsilon \frac{1}{\cancel{\sqrt{a}}} = \varepsilon$$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{a} - \sqrt{x}| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

$\boxed{d}$ Trappola!



Il punto -1 non è nel dominio $A = (0, \infty)$ e non è un estremo del dominio. Non si può chiedere per il limite!

$\boxed{e}$ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = ?$ $\qquad \frac{\lim_{x \to 0} 1 - \cos x}{\lim_{x \to 0} x} \quad \frac{= 0}{= 0}$ non definita!

Soluzione:

Un tipo di esercizio molto importante!

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1-\cos(x)}{x} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$= \frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x\,(1+\cos(x))}$$

teorema per limite del prodotto/somma/quoziente

$$= \frac{\sin(x)}{x} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\to 0} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} \longrightarrow 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

$\frac{\sin(x)}{x} \to 1$, $\sin(x) \to 0$, $\cos(x) \to 1$ per $x \to 0$

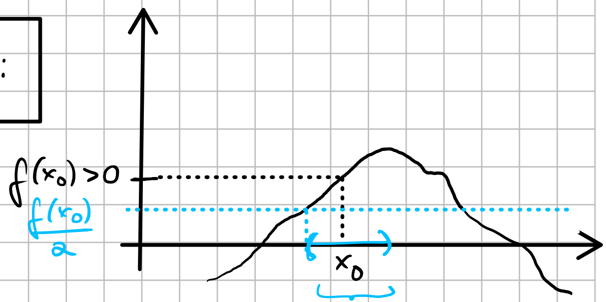
Risultato: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0.$

LEZIONE

Teoremi sulle funzioni continue:

Teorema della permanenza del segno:

Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 e sia continua in x_0.



intorno di x_0 con $f(x) > 0$ per ogni x nel intorno

Se $f(x_0) > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta): f(x) > 0.$$

Dimostrazione: Continuità significa:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0.$$

Usando ε e δ: Scegliamo $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$.

Allora esiste $\delta > 0$ con

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}.$$

Per $f(x) \geq f(x_0)$: $f(x) \geq f(x_0) > 0$ è banale.

Allora studiamo $f(x) < f(x_0)$:

$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$

$$|f(x) - f(x_0)| = f(x_0) - f(x)$$

$$f(x_0) - f(x) < \frac{f(x_0)}{2} \qquad | + f(x)$$

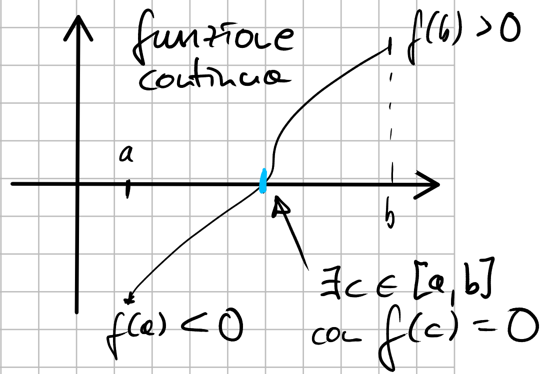
$$f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2} + f(x) \qquad | - \frac{f(x_0)}{2}$$

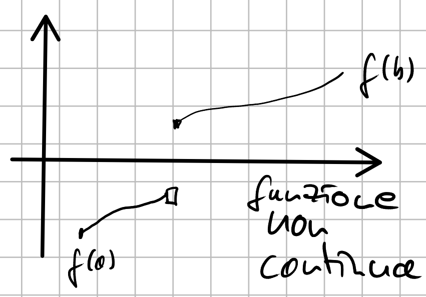
$$\underbrace{\frac{f(x_0)}{2}}_{> 0} < f(x).$$

∎

Teorema dell'esistenza degli zeri:

Sia f una funzione continua in un intervallo $[a,b]$.
Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.





Dimostrazione:

Idea: Costruire una successione convergente ad un punto che si verifichi essere lo zero della funzione data.

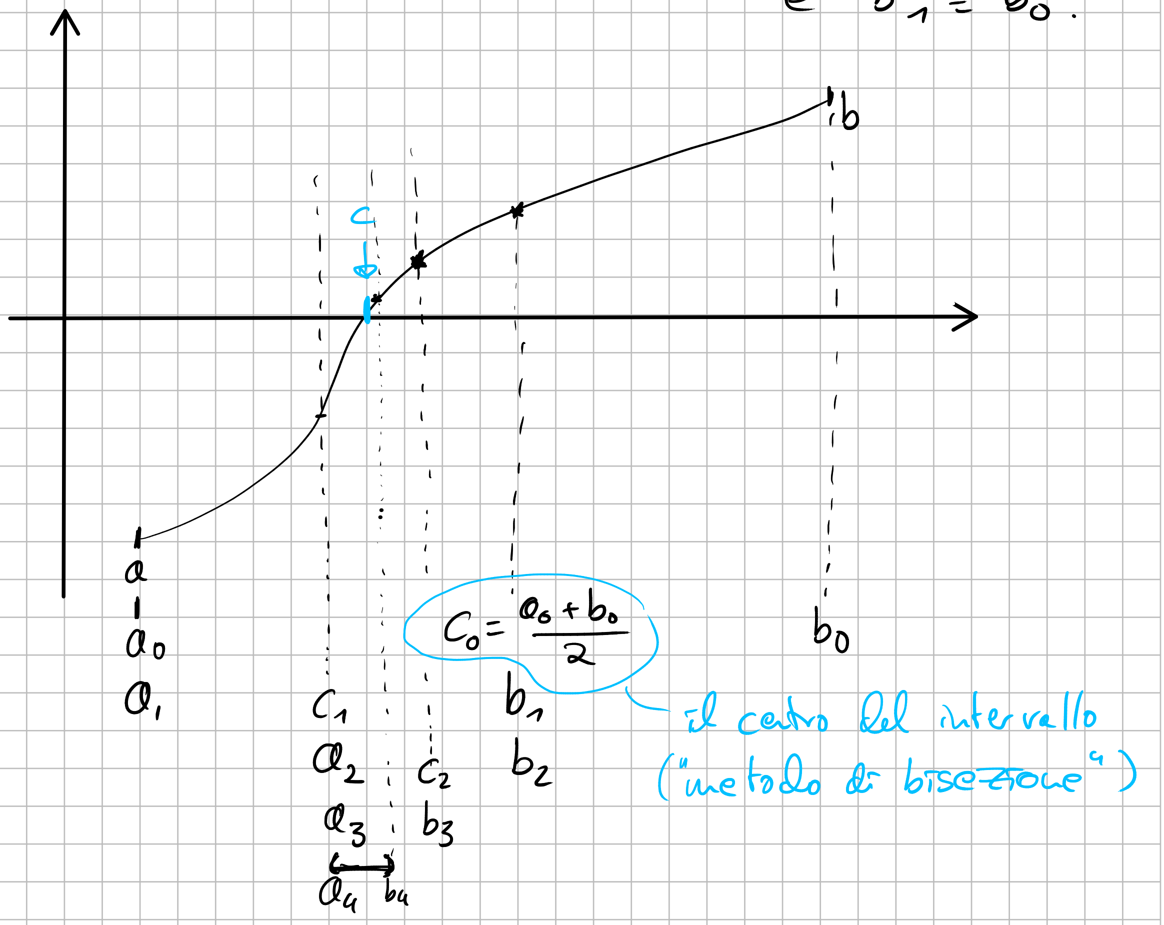
Usiamo "il metodo di bisezione".

Poniamo $a_0 := a$, $b_0 := b$, e $c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$.

Se $f(c_0) = 0$ allora non c'è più niente da dimostrare.

Se invece $f(c_0) > 0$: poniamo $a_1 = a_0$
e $b_1 = c_0$.

Al contrario, se $f(c_0) < 0$: poniamo $a_1 = c_0$
e $b_1 = b_0$.



Adesso ripetiamo la costruzione:

Al generico passo k: poniamo $c_k := \frac{a_k + b_k}{2}$.

Se $f(c_k) = 0$: non c'è più niente da dimostrare.

Se $f(c_k) > 0$: poniamo $a_{k+1} := a_k$
e $b_{k+1} = c_k$. "intervallo sinistro"

Se $f(c_k) < 0$: poniamo $a_{k+1} = c_k$
$b_{k+1} = b_k$. "intervallo destro".

Così abbiamo costruito induttivamente tre successioni: a_n, b_n, e c_n.

Si vede: a_n è non-decrescente.

b_n è non-crescente.

E abbiamo anche: $a_0 \le a_n \le c_n \le b_n \le b_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

In particolare: $a_n \le b_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $b_n \ge a_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Quindi per il teorema delle successioni monotone:

$\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n$ esistono e sono finiti. $(*)$

Si nota anche:

$b_n - a_n =$ ci sono due possibilità

$$b_{n-1} - c_{n-1} = b_{n-1} - \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$$

$$c_{n-1} - a_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - a_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}.$$

$$\Rightarrow b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$$

$$\Rightarrow b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) = 0$

$\qquad \| $

$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$ (perché abbiamo dimostrato che i limiti esistono in $(*)$)

Cioè: $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Adesso si può applicare il teorema dei carabinieri con $a_n \le c_n \le b_n$:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Scriviamo c per il limite comune.

La continuità di f assicura che:

$$f(c) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Per la costruzione abbiamo: $f(a_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f(b_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Se combiniamo:

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{<0} \leq 0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

$$\Rightarrow f(c) = 0.$$

Allora c è il numero che abbiamo cercato. ■

Esercizio interessante: programmare l'algoritmo della dimostrazione in C/Java/Python... provatelo.

$\boxed{\text{Menti}}$ $f(x) = x^7 + x - 1$. Esiste una soluzione per $f(x) = 0$? Si.

Si può anche usare altri punti, non devono essere $x=0$ e $x=1$.

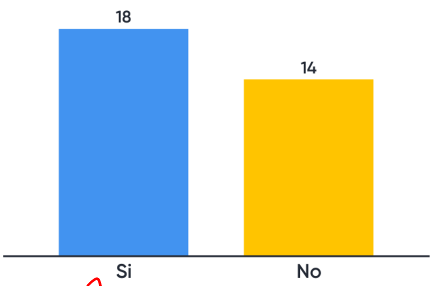
Dimostrazione: $f(0) = -1 < 0$

$f(1) = +1 > 0.$

La funzione è continua (perché è una somma/differenza di funzioni continue).

Usiamo il teorema:

$\exists c \in (0,1)$ con $f(c) = 0$. ■



giusto

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $f(x) = e^x + x = 0$: esiste una soluzione?

<u>Soluzione:</u> $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$.

Quindi esiste un $c \in (-1,0)$ con $f(c) = 0$.

Il teorema era molto utile qui perchè una formula analitica per la soluzione non esiste.

Si può solo usare l'algoritmo per approssimare c.

Si trova: $c \approx -0{,}567143\ldots$