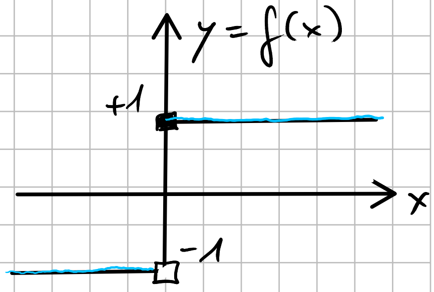
Funzioni continue:

Consideriamo funzioni f definite in un dominio A, con A unione finita di intervalli.

Idea centrale: "Una funzione continua è una funzione che si può disegnare senza staccare la penna dal foglio, oppure: una funzione che non salta".

Esempio:

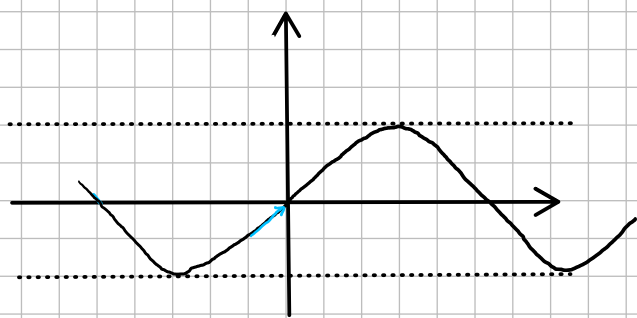
(1) $f(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



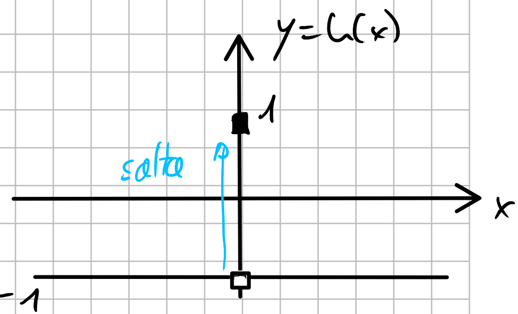
non è continua!

(2) $g(x) = \operatorname{sen}(x)$

Questa è una funzione continua.



(3) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = 0 \\ -1 & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to 0-} h(x) = -1 = \lim_{x \to 0+} h(x)$

$= \lim_{x \to 0} h(x).$

$\lim_{x \to 0} h(x) = -1 \neq 1 = h(0).$

La funzione $h(x)$ non è continua!

Definizione: Una funzione f è continua in un punto x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

abbiamo bisogno di $x_0 \in A$

⚠ Attenzione: Continuità è un concetto solo definito per punti x_0 nel dominio A.

Definizione: Una funzione è <u>continua in un intervallo</u> (a,b) se è continua in ogni punto x_0 con $a < x_0 < b$.

Esempio: La funzione

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è continua su tutto il dominio, ma il dominio è solo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teorema: La somma, la differenza, il prodotto di funzioni continue sono funzioni continue. Il quoziente di funzioni continue è una funzione continua in punti con un intorno tale che il denominatore non si annulla lì.

Dimostrazione: Sia f una funzione continua, sia g una funzione continua. Allora

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$
$$= f(x_0) + g(x_0). \qquad \blacksquare$$

Esempi:

(1) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con $f(x) = 1$, $g(x) = x$

Il teorema dice: $\frac{1}{x}$ è continua per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) $\dfrac{x}{x} = \dfrac{g(x)}{g(x)}$ $\quad g(x) = x$

Il teorema dice: $\frac{x}{x}$ è continua se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Non è ottimale: $\frac{x}{x} = 1$, ovviamente ha una estensione continua nel punto 0 (lo vediamo dopo).

(3)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0, \end{cases} \qquad \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \text{non è definita per} & x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Non esiste un intorno $(-\delta_1, \delta_2)$ di $x = 0$ con $f(x) \neq 0$.
Allora il teorema non dice niente su $\frac{1}{f(x)}$.

$\boxed{\text{Teorema:}}$ Se $g: X \to Y$ è continua in x_0
e $f: Y \to \mathbb{R}$ è continua in $y_0 := g(x_0)$,
allora anche $f(g(x))$ è continua in x_0.

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$

$$= f(g(x_0)). \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Esempi:}}$ Le funzioni $f(x) = \ldots$
... potenze x^b, esponenziale a^x,
logaritmi $\log_a(x)$, funzioni trigonometriche
$\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, e valore assoluto $|x|$
sono funzioni continue.

$\boxed{\text{Dimostrazione per } \operatorname{sen}(x):}$

Il dominio del sen è $A = \mathbb{R}$. Allora dobbiamo dimostrare continuità in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Continuità significa: $\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x_0)$.

Equivalentemente: $\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(x_0 + h) = \operatorname{sen}(x_0)$.

Usando una formula di addizione per sen:

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} \left(\operatorname{sen}(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \operatorname{sen}(h) \right)$$

$$= \operatorname{sen}(x_0) \underbrace{\lim_{h \to 0} \cos(h)}_{=1} + \cos(x_0) \underbrace{\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(h)}_{=0}$$

$$= sen(x_0).$$

$\blacksquare$

La funzione $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$ con dominio $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$;

$\boxed{\text{Dimostrazione per } tg(x):}$ Si usa il teorema per il quoziente.

$\blacksquare$

Continuità è utile per calcolare limiti

$\boxed{\text{Esempio:}}$ Sia $b > 0$. Calcoliamo $\lim_{x \to 0+} (1 + bx)^{\frac{1}{x}}$:

Poniamo $y := \dfrac{1}{bx}$.

Allora $x \to 0+$ implica $y \to +\infty$. $\qquad \frac{1}{x} = by$

Allora

$$\lim_{x \to 0+} (1 + bx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{by}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{b} = \Big(\underbrace{\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}}_{\substack{\text{limite} \\ \text{notevole:} \\ = e}}\Big)^{b} = e^{b}.$$

continuità di $f(x) = x^b$ usata per portare limite dentro la potenza

Continuità:

"$\lim_{x \to x_0} (x^b) = \left(\lim_{x \to x_0} x\right)^b = x_0^{\,b}$."

"$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0)$".

$\boxed{\text{Esempio:}}$ Qual è il $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log(x)}{x}$?

$$\frac{\log(x)}{x} = \frac{1}{x} \log(x) = \log\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = \log\left(\sqrt[x]{x}\right).$$

Usando continuità del log:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \log\left(\sqrt[x]{x}\right)$$

$$= \log\Big(\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \sqrt[x]{x}}_{=1}\Big) = \log(1) = 0.$$

Estensione continua (o prolungamento continuo)

Consideriamo adesso una funzione con dominio A in cui "manca un punto":

Esempio: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

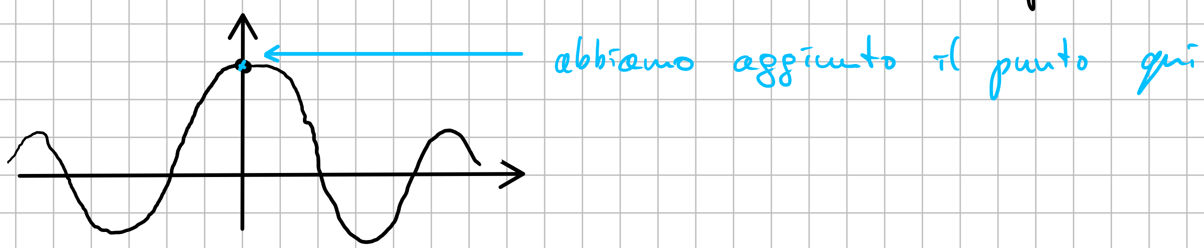
Abbiamo già visto: $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Se poniamo $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

otteniamo una funzione continua:

$$\lim_{x \to 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = \tilde{f}(0).$$

Abbiamo trovato una estensione continua di f.



Definizione: Sia f una funzione definita su un intervallo mancando un punto,

$$A = (a, b) \setminus \{x_0\} \qquad a < x_0 < b$$
$$= (a, x_0) \cup (x_0, b).$$

Se esiste una funzione continua $\tilde{f}$ con $\tilde{f}(x) = f(x)\ \forall x \in A$ chiamiamo $\tilde{f}$ una <u>estensione continua di f</u>, o un <u>prolungamento continuo di f</u>.

Si dice anche: la funzione f presenta una singolarità eliminabile nel punto x_0.

Esempio: $f(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Esiste una funzione continua $\tilde{f}$ con $f(x) = \tilde{f}(x)$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

In altre parole: esiste un numero $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \ell & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{è continua?}$$

La risposta è no! Sempre:

$$\lim_{x \to 0-} \tilde{f}(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0+} \tilde{f}(x) = +1.$$

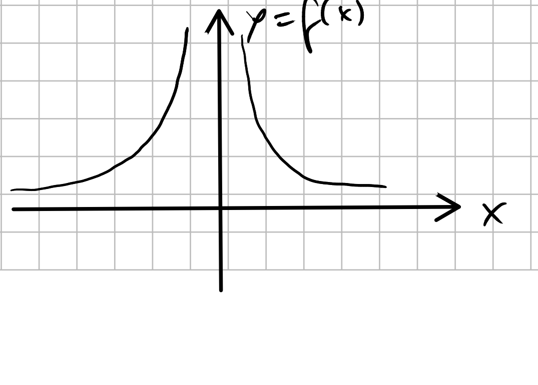
Allora $\lim_{x \to 0} \tilde{f}(x)$ non può essere $= \ell$, perché non esiste.

Definizione: Sia x_0 nel dominio di f.

- f presenta una <u>discontinuità di prima specie</u> se limite destro e limite sinistro esistono ma
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0+} f(x).$$

- f presenta una <u>discontinuità di seconda specie</u> se almeno uno dei limiti
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{x \to x_0+} f(x)$$
non esiste o è infinito.

Esempi: (1) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ se $x \neq 0$.



Esiste un prolungamento continuo nel punto 0?

Non esiste!

Perché per ogni $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ \ell \in \mathbb{R} & \text{se } x = 0. \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} \tilde{f}(x) = +\infty \neq \ell$ perché $+\infty \notin \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Menti:}}$

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+1)(x+2)}.$$

Un prolungamento continuo esiste nei punti:

(1) $x = -1$ e $x = -2$ (2) nessun punto

$\boxed{(3) \quad \text{solo in } x = -1}$ (4) solo in $x = -2$

soluzione

Perché?

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}.$$

<u>In $x_0 = -1$:</u> $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+2} = \frac{\lim_{x \to -1} (x-1)}{\lim_{x \to -1} (-1+2)}$

$$= \frac{-2}{1} = -2.$$

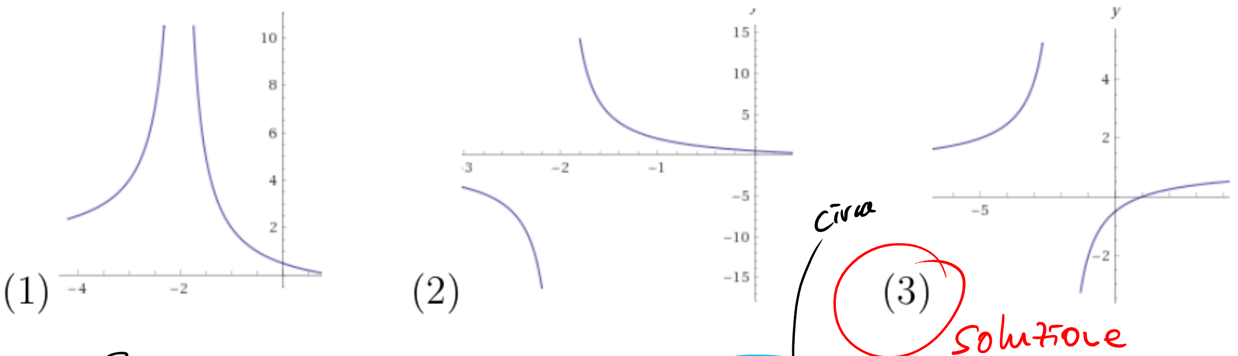
Poniamo $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq -1 \\ -2 & \text{per } x = -1 \end{cases}$ e abbiamo

trovato un prolungamento continuo nel $x_0 = -1$.

<u>In $x_0 = -2$:</u> $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+2}$ $\qquad x-1 \to -3, \quad x+2 \to 0$

Diverge ad $\pm\infty$, allora un prolungamento continuo non esiste.

La funzione $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$: qual'è?



Perchè? Vicino a $x_0 = -2$: $x - 1 \approx -3$, si può pensare di $\frac{x-1}{x+2} = \frac{-3}{x+2}$. La funzione cambia segno se andiamo da $x < -2$ a $x > -2$ $\Rightarrow$ (1) non è possibile.

Per $x > -2$: $x + 2 > 0$ $\Rightarrow$ $\frac{-3}{x+2} > 0$ $\Rightarrow$ (2) non è possibile.

Così l'argomento non è una dimostrazione, ma è anche importante avere un'idea del comportamento di funzioni senza fare molti conti.

Trova i valori di $a \in \mathbb{R}$ tale che la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - a}$$

ha una estensione continua su tutti i numeri reali $\mathbb{R}$.

Soluzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - a}$$

Dov'è $= 0$?

Dobbiamo cancellare $x - a$ per non avere limite $\pm\infty$ al punto $x_0 = a$.

$$x^2 - 5x + 6 \stackrel{!}{=} 0$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = 2.$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2).$$

Allora $f(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{x-a}$.

Perchè non esiste una estensione continua per esempio per $a=1$?
Perchè con $a=1$, il limite nel punto $x_0 = 1$ non esiste!

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-3)(x-2)}{x-1} = +\infty .$$ La funzione diverge ad $+\infty$.

Perchè esiste una estensione continua per $a=2$?

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2} (x-3) = \underline{\underline{-1}}.$$

Se poniamo $\tilde{f}(2) = -1$ abbiamo trovato una estensione continua.

$\Rightarrow$ Soluzione: Un prolungamento continuo su tutto $\mathbb{R}$ esiste solo per $a=2$ e per $a=3$.