Def.: (di ieri) f tende ad l per x che tende ad x_0 se, per ogni successione $x_n \longrightarrow x_0$, con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, risulta $f(x_n) \longrightarrow l$.

Teorema: (di ieri) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ esistono e sono uguali.

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$

"$\Rightarrow$" Sia x_n una successione con $x_n \longrightarrow x_0$ e $x_n > x_0$. Allora ovviamente x_n è anche una successione con $x_n \longrightarrow x_0$. Allora $f(x_n) \longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Anche per $x_n < x_0$: $f(x_n) \longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)$.

"$\Leftarrow$" Usiamo il metodo "ε e δ".

Sia $\varepsilon > 0$. Dobbiamo dimostrare che esiste un $\delta > 0$ con: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

$$\Rightarrow \Big| f(x) - \underbrace{\lim_{x\to x_0+} f(x)}_{=l} \Big| < \varepsilon. \quad (*)$$

Siccome $\lim_{x\to x_0+}$ esiste: $\exists\, \delta_1 > 0$ con

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow \Big|f(x) - \lim_{x\to x_0+} f(x)\Big| < \varepsilon.$$

Siccome $\lim_{x\to x_0-}$ esiste: $\exists\, \delta_2 > 0$ con

$$x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow \Big| f(x) - \underbrace{\lim_{x\to x_0-} f(x)}_{= \lim_{x\to x_0+} f(x)} \Big| < \varepsilon.$$

Dobbiamo scegliere $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e abbiamo dimostrato $(*)$. ∎

Esempio:
$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x<0 \\ \cancel{\frac{4\pi}{e}} & \cancel{\text{se } x=0} \\ x\cdot\operatorname{sen}(x) & \text{se } x>0 \end{cases}$$
non entra

limiti per $x \to 0+$, $x \to 0-$, $x \to 0$ esistono?

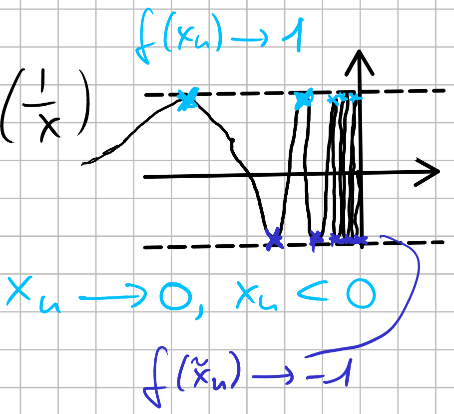
Limite destro: $-1 \le \operatorname{sen}(x) \le 1 \Rightarrow -x \le x\operatorname{sen}(x) \le x$.

Sia x_n una successione con $x_n \to 0$ e $x_n > 0$:

$$-x_n \le x_n \operatorname{sen}(x_n) \le x_n$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$0 \qquad\qquad\qquad 0$$

Teorema dei carabinieri
$$\Rightarrow x_n \operatorname{sen}(x_n) \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0+} f(x) = 0.$$

Limite sinistro: per $x<0$: $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$



$\lim_{x\to 0-} f(x)$ non esiste.

Anche $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste.

Teorema: (di ieri) Sia f una funzione con dominio A. Sia $x_0 \in A$ oppure un estremo di un intervallo. Sia $l \in \mathbb{R}$. Le seguenti relazioni sono equivalenti:

(1) $\forall$ successione $x_n \longrightarrow x_0$ con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$:
$$f(x_n) \longrightarrow l.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta$ e $x \in A\setminus\{x_0\}$
$$\Rightarrow |l - f(x)| < \varepsilon.$$

non fatto ieri

Dimostrazione: "(2) $\Rightarrow$ (1)": Sia x_n una successione con $x_n \longrightarrow x_0$ e $x_n \in A\setminus\{x_0\}\ \forall n$.

Sia $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare n suff. grande per $|f(x_n) - l| < \varepsilon$.

Usiamo (2): $\exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Ma seguendo la def. di "$x_n \to x_0$":

$\exists N \in \mathbb{N}$ con $n \geq N \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta$.

Allora $n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$.

"(1) $\Rightarrow$ (2)": Possiamo anche dimostrare "$\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$". "non"/negazione

"Se piove la strada è bagnata" $\Longleftrightarrow$ "Se la strada non è bagnata, non piove."

(2) era: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Si può anche dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \text{ con } |x - x_0| < \delta : |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Negazione

$\neg(2)$: "$\forall$" diventa "$\exists$", "$\exists$" diventa "$\forall$"

$\neg$"Tutti i politici sono corrotti." $\Longleftrightarrow$ "Esiste (almeno) un politico chi non è corrotto."

$\neg$"$\forall x \in$ Politici: x è corrotto." $\Longleftrightarrow$ "$\exists x \in$ politici: x non è corrotto".

$\neg(2)$: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x$ con $|x - x_0| < \delta : |f(x) - \ell| \geq \varepsilon$.

Allora, un $\varepsilon > 0$ di questo tipo esiste.

Lo chiamiamo ε_0.

Scegliamo $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Esiste x con $|x - x_0| < \frac{1}{n}$ e $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0$.

Chiamiamo x trovato così: x_n.

Vuol dire: abbiamo trovato una successione x_n con $x_n \to x_0$ ma $f(x_n) \not\to \ell$.

Oppure: $\exists x_n \to x_0 : f(x_n) \not\to \ell$.

Questo è esattamente $\neg(1)$:

$$\neg(1) = \neg(\forall x_n \to x_0 : f(x_n) \to \ell)$$
$$= \exists x_n \to x_0 : f(x_n) \not\to \ell.$$

Esempi: di limiti importanti:

- Funzione esponenziale:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

In particolare: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

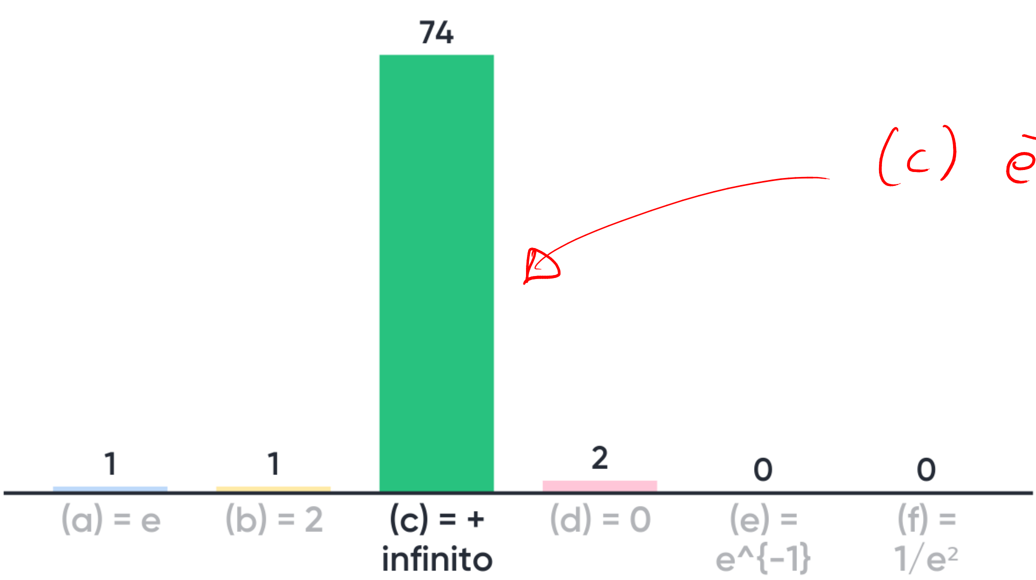
- per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

$$\lim_{x\to 0} x^n = 0.$$

Qual è il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} ?$$

(a)	$= e$	(b)	$= 2$	(c)	$= +\infty$
(d)	$= 0$	(e)	$= e^{-1}$	(f)	$= \frac{1}{e^2}$



(c) è giusto.

Bravo!

Sia a_n una successione a termini positivi. Definiamo $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Il **criterio del rapporto (per le successioni)** è come segue:

1. Se la successione b_n converge ad un limite $b < 1$, allora $a_n \to 0$.
2. Se la successione b_n converge ad un limite $b < 1$, allora $a_n \to b$.
3. Se la successione b_n converge a zero, allora a_n tende ad un limite $a < 1$.
4. Non era nel programma del semestre scorso.

giusto.

$$\boxed{\text{La successione } \frac{e^n}{n^2} \to +\infty.}$$

(Limite di una successione.)

Dimostrazione: Definiamo $a_n := \frac{n^2}{e^n}$.

Idea: invece di dimostrare $\frac{e^n}{n^2} \to +\infty$, dimostriamo $a_n \to 0$ usando il criterio del rapporto.

Allora
$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n^2}{e^n}\right)} = \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n^2}$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n} e} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{e} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Criterio del rapporto $\Rightarrow a_n \longrightarrow 0$. ∎

$$\boxed{\text{Dimostrazione di } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \longrightarrow +\infty;}$$ (Limite di una funzione)

Sia $M > 0$.

Abbiamo già dimostrato: $\frac{e^n}{n^2} \longrightarrow +\infty$.

Allora $\exists N \in \mathbb{N}$ con $\frac{e^N}{N^2} > M$.

Abbiamo anche: $\frac{e^x}{x^2} \geq \frac{e^N}{N^2}$ per $x > N$. $(*)$

Perché?

Scriviamo $x = N + \underbrace{(x-N)}_{=:\hat{x}}$

Ovviamente $x > N \implies \hat{x} > 0$.

$(*)$ si può scrivere come:

$$\frac{e^{\hat{x}+N}}{(\hat{x}+N)^2} \geq \frac{e^N}{N^2}$$

$$\| $$

$$\frac{e^{\hat{x}}e^N}{(\hat{x}+N)^2} \qquad \Big| : e^N \qquad \Big| \cdot (\hat{x}+N)^2$$

$$\iff \underbrace{e^{\hat{x}}}_{>1 \text{ per ogni } \hat{x}>0} \geq \frac{(\hat{x}+N)^2}{N^2} = \left(\frac{\hat{x}+N}{N}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{\hat{x}}{N}+1\right)^2}_{\downarrow \atop 1 \ (N\to\infty)}.$$

Per N grande $e^{\hat{x}} > \left(\frac{\hat{x}}{N}+1\right)^2$.

$$\implies \frac{e^x}{x^2} \geq \frac{e^N}{N^2} > M \quad \text{per ogni } x > N.$$

Altri limiti importanti:

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty \,, \quad \lim_{x\to 0+} \log(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \,, \quad \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Teorema: (Operazioni con i limiti di funzioni)

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni e rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente dei due limiti, se non sono indeterminate (non sono "$\infty - \infty$", "$0 \cdot \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\frac{0}{0}$").

Dimostrazione:

applicare il teorema analogo per successioni. ∎

Esempi: (1) per $x \longrightarrow +\infty$:

$$\frac{e^x}{x^2} \qquad e^x \longrightarrow +\infty, \quad x^2 \longrightarrow +\infty$$

(2) $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ per $x \longrightarrow 0$: $1-\cos(x) \longrightarrow 0$, $x^2 \longrightarrow 0$ Così non si può decidere!

Soluzione: $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$

$$= \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2}_{\to 1} \frac{1}{1+\underbrace{\cos(x)}_{\to 1}} \longrightarrow 1^2 \, \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Teorema: Siano $g: X \longrightarrow Y$
e $f: Y \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni

tali che: $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$

e $\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$,

ed esista un intorno I di x_0 tale
che $g(x) \neq y_0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$.

allora anche $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell$.

Dimostrazione: esercizio — anche nel libro,
ma è importante di provare
da solo e solo guardare nel libro
se non riuscite per alcuni giorni!
Se avete trovato la dimostrazione
da solo, controllate nel libro! ∎

- Prossima lezione:
  martedì 10:30 (orario normale), zoom.

- Esercizi da risolvere prima, martedì discutiamo
  la soluzione.

Esercizi e riassunti: su Ariel e anche su www.nielsbenedikter.de -> Teaching

Domande? niels.benedikter@unimi.it

Grazie!