Matematica del continuo

Temi:
(1) Limiti di funzioni
(2) funzioni continue
(3) derivate
(4) studio di funzioni: massimi, minimi
(5) formula di Taylor
(6) integrali
(7) "basics" equazioni differenziali.

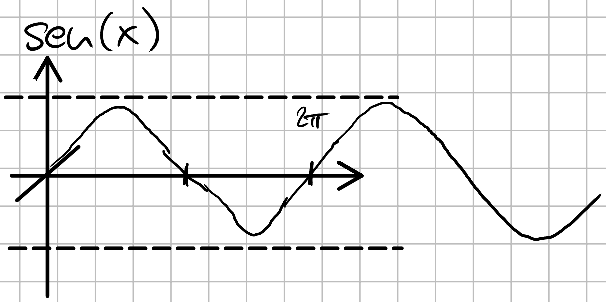
Esercizi su ARIEL ogni mercoledì sera.
Da risolvere a casa prima della lezione di martedì della settimana prossima.

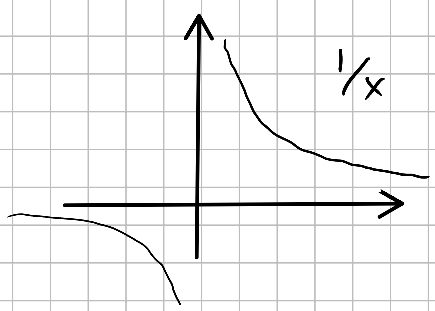
(1) Limiti di funzioni

Esempio: Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

È definita per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

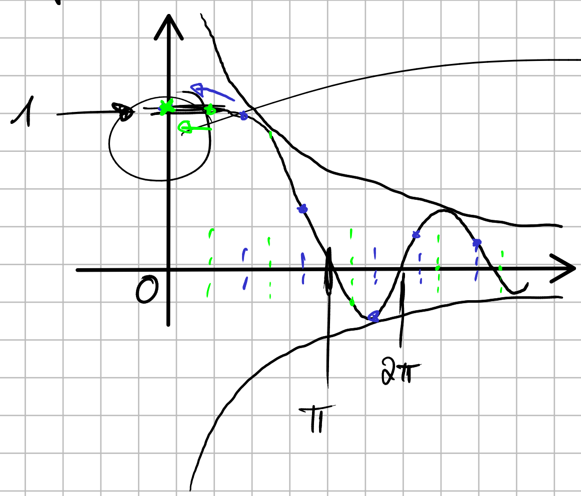




Osservazione: $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall x \in 0.$$

$$y = f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$



Cosa succede per x vicino a $x_0 = 0$?

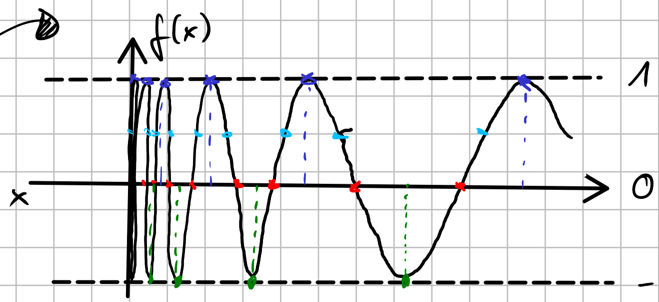
verde, blu: successioni $x_n \to 0$.

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	0,99834	0,999983	0,99999998	0,999999...

Idea: "$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ tende a 1 per x che tende a 0."

Cosa significa esattamente? Dobbiamo scrivere una definizione!

Non vogliamo questa situazione



$f(x_n) = 1$

$f(\tilde{\tilde{x}}_n) = 0$

$f(\tilde{x}_n) = -1$

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad -1 \leq f(x) \leq +1$$

Definizioni: Se a, b sono numeri reali con $b > a$, per indicare un intervallo di estremi a e b, scriviamo:

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo aperto

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ chiuso a sinistra e aperto a destra

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ aperto a sinistra, chiuso a destra

Intervalli illimitati:

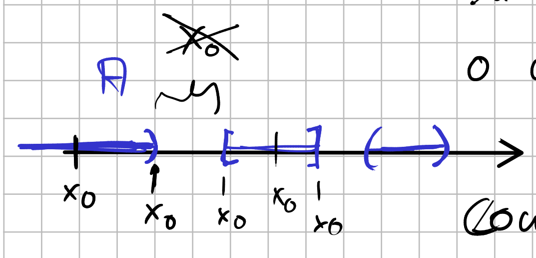
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}.$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Definizione: Un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un intervallo aperto contenente x_0.

Esempio: $(x_0 - \delta, x_0 + 5\delta)$ con un $\delta > 0$ è un intorno di x_0.

Gli intervalli $(x_0, x_0 + \delta)$ e $(x_0 - \delta, x_0]$ non sono intorni di x_0.

Definizione: Consideriamo una funzione f definita su un insieme A che è un intervallo o unione finita di intervalli.



Consideriamo x_0 che appartiene ad è estremo ad uno di tali intervalli.

Si dice che f tende ad ℓ per x che tende ad x_0 se: per ogni successione $x_n \longrightarrow x_0$, con $x_n \in A$, e con $x_n \neq x_0$ (per ogni x_n) risulta $f(x_n) \longrightarrow \ell$.

Si scrive: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ oppure $f(x) \xrightarrow{(x \to x_0)} \ell$.

Si dice: "f ha limite uguale ad ℓ per x che tende a x_0".
"f converge ad ℓ per x che tende a x_0".

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$

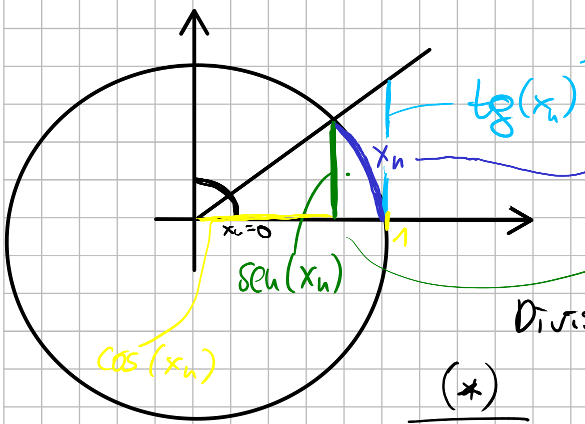
$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ Sia x_n una successione con

$x_n \longrightarrow 0$ e $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Per n sufficientemente grande abbiamo $|x_n| < \frac{\pi}{2}$.

Prima possibilità: $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$:

abbiamo $\operatorname{sen}(x_n) < x_n < \operatorname{tg}(x_n) = \dfrac{\operatorname{sen}(x_n)}{\cos(x_n)}$. $(*)$



$0 < x_n < \frac{\pi}{2}$

implica anche $\operatorname{sen}(x_n) > 0$.

Divisione da $\operatorname{sen}(x_n)$:

$$\frac{(*)}{\operatorname{sen}(x_n)} \Longrightarrow 1 < \frac{x_n}{\operatorname{sen}(x_n)} < \frac{1}{\cos(x_n)}.$$

$$\Longrightarrow 1 > \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} > \cos(x_n). \quad (**)$$

Seconda possibilità: $-\frac{\pi}{2} < x_n < 0$.

$$1 > \underline{\frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n}} = \frac{-\operatorname{sen}(x_n)}{-x_n} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(-x_n)}{-x_n}}_{\text{si usa } (**)}$$

$$> \cos(-x_n) = \underline{\cos(x_n)}.$$

$$\Longrightarrow 1 > \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} > \cos(x_n) \quad \text{per \underline{ogni n grande}.}$$

$$\downarrow$$

$$1 \quad \text{per } x_n \longrightarrow 0.$$

$\Longrightarrow$ Teorema dei carabinieri $\Longrightarrow \dfrac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} \longrightarrow 1.$

Esempio: $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0.$

Dimostrazione: Sia x_n una successione con $\boxed{x_n \to 0,}$ e con $x_n \neq 0$.

Per n grande: $\boxed{-\frac{\pi}{2} < x_n < \frac{\pi}{2}}$.

Per $x_n > 0$: $\quad 0 < \operatorname{sen}(x_n) < x_n.$

Per $x_n < 0$: $\quad x_n < \operatorname{sen}(x_n) < 0.$

$$\Rightarrow \underbrace{-|x_n|}_{\downarrow\, 0} < \operatorname{sen}(x_n) < \underbrace{|x_n|}_{\downarrow\, 0} \quad \text{per ogni } n \text{ grande.}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(x_n) \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0.$$

∎

Teorema: Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e soltanto se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \\ e\ x \neq x_0 \\ e\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |\ell - f(x)| < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$$

Scegliamo prima ε piccolo, poi δ piccolo.

$$\Rightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon).$$

Dimostrazione: domani.

Esempio: Ancora una volta: $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \longrightarrow 1 \quad (x \to 0).$

Dimostrazione: Sia $\varepsilon > 0$.

Abbiamo $\cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < 1.$

Per x molto piccolo: $\cos(x) > 1 - \varepsilon.$

Allora esiste $\delta > 0$ tale che:

$$-\delta < x < \delta \Rightarrow 1 - \varepsilon < \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < 1.$$

∎

"Metodo ε-δ può essere più semplice."

Definizione: Limiti infiniti:

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Si dice: "$f$ diverge ad $+\infty$ per $x \to x_0$".

Def.

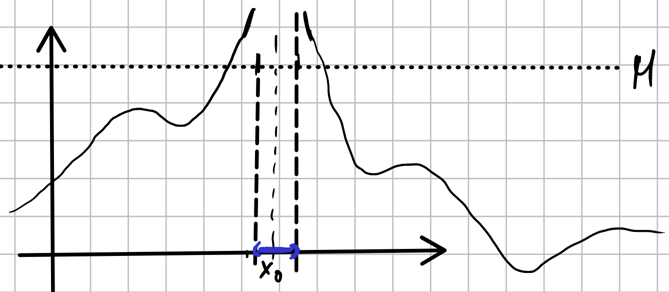
$\iff \forall x_n \to x_0$ con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$: $f(x_n) \to +\infty$.

$\iff \forall M > 0 \ \exists \delta > 0$: "$\delta$ piccolo"

$|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ e $x \in A \Rightarrow f(x) > M$.

"M grande"

pensa di "$+\infty - \varepsilon$" (che non esiste)



"prima scegliere M grande, poi δ piccolo"

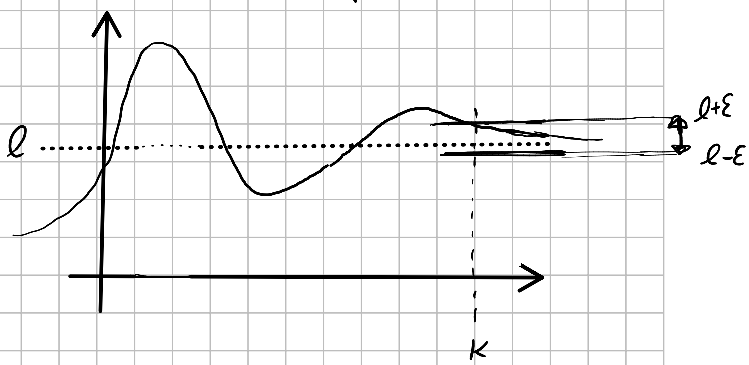
intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

(2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

$\iff \forall x_n \to +\infty$ con $x_n \in A$: $f(x_n) \to \ell$.

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0$: $x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

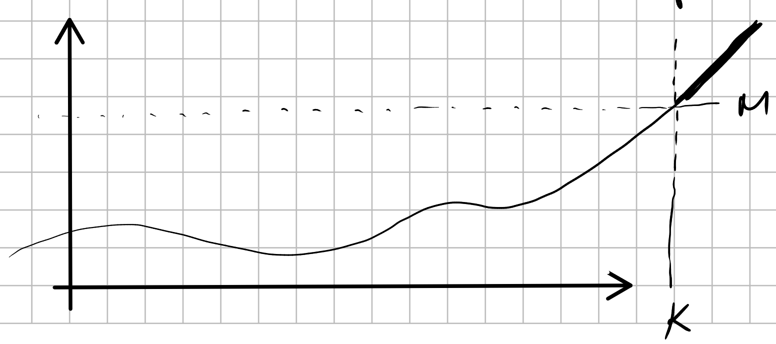
ε piccolo $\qquad K$ grande



(3) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\iff \forall x_n \to \infty$ con $x_n \in A$: $f(x_n) \to +\infty$

$\iff \forall M > 0 \ \exists K > 0$: $x > K \Rightarrow f(x) > M$.



$\boxed{\text{Esempio:}}$ $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Usiamo (1) con $x_0 = 1$.

Sia $M > 0$. Per $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ abbiamo:

$$|x-1| < \delta \Rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > M.$$

■

Menti:

Siano f, g, h, i funzioni con dominio $A = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$, definite come

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x) & \text{per } x > 0 \\ -\sin(x) & \text{per } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} |x|\sin(x) & \text{per } x > 0 \\ -\frac{1}{|x|}\sin(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

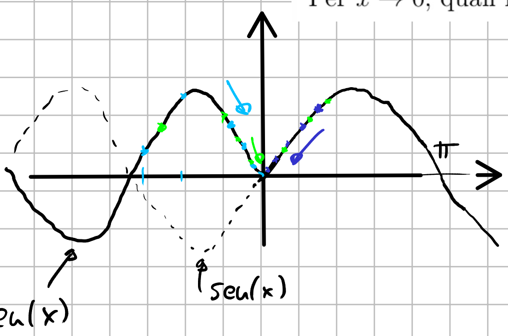
$$h(x) := \begin{cases} |x|\sin(x) & \text{per } x > 0 \\ |x|\cos(x) & \text{per } x < 0 \end{cases} \qquad i(x) := \begin{cases} \sin(x) & \text{per } x > 0 \\ |x|\cos(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Per $x \to 0$, quali limiti esistono?

Risposte giusta:

f, h, i: limiti esistono.

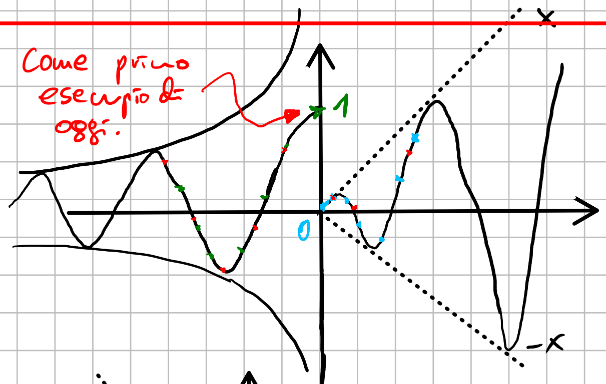
f:



$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{per } x > 0 \\ -\operatorname{sen}(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Esiste.

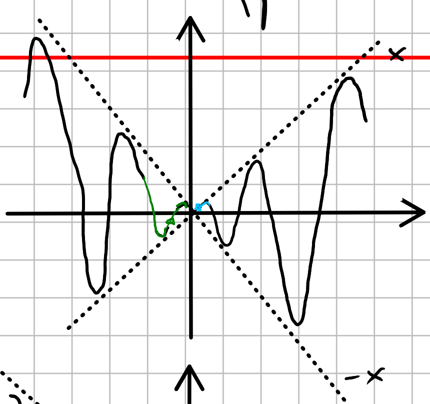
g:



$$g(x) = \begin{cases} |x| \operatorname{sen}(x) & \text{per } x > 0 \\ -\frac{1}{|x|} \operatorname{sen}(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Limite non esiste.

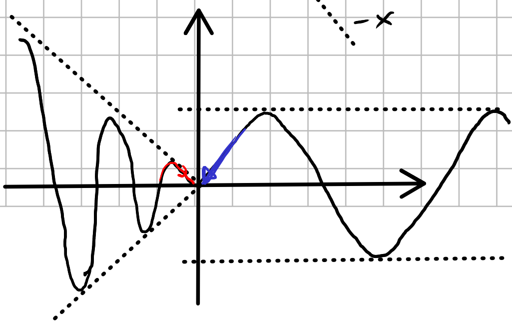
h:



$$h(x) = \begin{cases} |x| \operatorname{sen}(x) & \text{per } x > 0 \\ |x| \cos(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} h(x) = 0$. esiste.

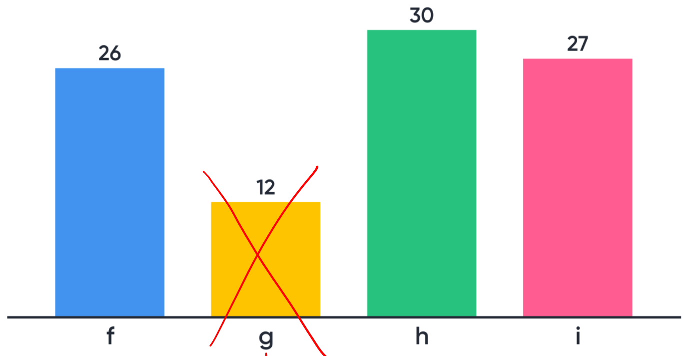
i:



$$i(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{per } x > 0 \\ |x| \cos(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} i(x) = 0$. esiste.

40 risposte.



sbagliato

Definizione: Limite destro e sinistro:

(1) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

$\iff$ per ogni successione $x_n \longrightarrow x_0$ con $x_n \in A$ e $x_n > x_0$: $f(x_n) \longrightarrow \ell$

$\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A$
$\Rightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

(2) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

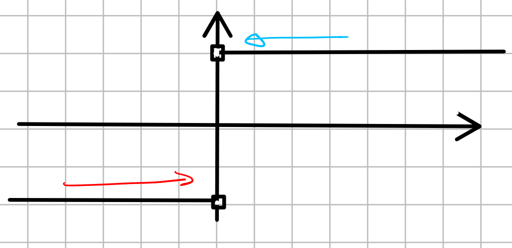
$\iff$ $\forall x_n \longrightarrow x_0$ con $x_n \in A$ e $x_n < x_0$: $f(x_n) \longrightarrow \ell$

$\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A \Rightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Esempio: $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Per $x \in A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

per $x > 0$: $|x| = x \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$.

per $x < 0$: $|x| = -x \Rightarrow f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$.



$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

Teorema: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste $\iff$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ esistono e sono uguali.

Dimostrazione: domani.