Teorema di Cantor: Sia f continua in $[a,b]$ (chiuso e limitato!). Allora f è uniformemente continua in $[a,b]$.

Dimostrazione: Procediamo per assurdo.

Continuità uniforme significa:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x \text{ e } \tilde{x} \text{ in } [a,b] \text{ con } |x-\tilde{x}|<\delta :$

$$|f(x)-f(\tilde{x})|<\varepsilon.$$

Negazione:

$\exists \varepsilon>0 \ \forall \delta>0 : \exists x \text{ e } \tilde{x} \text{ in } [a,b] \text{ con } |x-\tilde{x}|<\delta :$

$$|f(x)-f(\tilde{x})|\geq \varepsilon.$$

"$\forall \delta>0$": scegliamo $\delta=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Indichiamo con x_n, $\tilde{x}_n$ i corrispondenti punti per cui

$$|x_n-\tilde{x}_n|<\delta=\frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n)-f(\tilde{x}_n)|\geq\varepsilon.$$

x_n è nell'$[a,b]$, allora per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una successione estratta x_{n_k} convergente: $x_{n_k}\longrightarrow x_0 \in [a,b]$.

Inoltre
$$\underbrace{x_{n_k}-\frac{1}{n_k}}_{\substack{\longrightarrow x_0 \\ (\text{per } k\to+\infty)}} < \tilde{x}_{n_k} < \underbrace{x_{n_k}+\frac{1}{n_k}}_{\longrightarrow x_0}$$

Per il teorema dei carabinieri: anche $\tilde{x}_{n_k}\longrightarrow x_0$.

Per l'ipotesi di continuità:

$$f(x_{n_k})\longrightarrow f(x_0) \qquad f(\tilde{x}_{n_k})\longrightarrow f(x_0).$$

Contrasta con il fatto che

$$|f(x_{n_k})-f(\tilde{x}_{n_k})|\geq\varepsilon \qquad \forall k\in\mathbb{N}.$$

$\blacksquare$

Adesso la dimostrazione di "f è continua in $[a,b]$, allora f è integrabile in $[a,b]$". (2)

Dimostrazione:

Per il teorema di Cantor f è uniformemente continua:

fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{per ogni coppia } x, \tilde{x} \in [a,b] \text{ con } |x - \tilde{x}| < \delta.$$

Sia P una partizione di $[a,b]$ tale che:

$$|x_k - x_{k-1}| < \delta \quad \text{per ogni } k \in \{1, 2, 3, \dots n\}.$$

Allora per $m_k := \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ e

per $M_k := \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

abbiamo: $M_k - m_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots n\}$.

$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

f è continua,

$[x_{k-1}, x_k]$ è chiuso

Weierstraß: $\exists$ minimo.

$\Rightarrow \exists \tilde{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$:

$m_k = f(\tilde{x}_k)$.

Stessa cosa per $M_k = f(\tilde{\tilde{x}}_k)$

$\Rightarrow M_k - m_k = f(\tilde{\tilde{x}}_k) - f(\tilde{x}_k) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$
$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1})$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \right)$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k \right)$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a} (x_n - x_0) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

L'integrale indefinito:

Teorema fondamentale del calcolo integrale:
Se f è continua e $F' = f$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Definizione: Sia f una funzione continua in $[a,b]$. L'insieme di tutte le primitive di f in $[a,b]$ si chiama integrale indefinito di f, indicato con $\int f(x)\,dx$.

Allora $$\int f(x)\,dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\} = F(x) + c$$
per una primitiva F di f.

⚠ $\int_a^b f(x)\,dx$ è un numero reale. $\int f(x)\,dx$ è un insieme di funzioni.

Regole: $$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$\forall c \in \mathbb{R}$: $$\int c\, f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx.$$

Integrali indefiniti:

$$\int x^b\,dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c \quad \text{se } b \neq -1$$

Dimostrazione
$$D\left(\frac{x^{b+1}}{b+1} + c\right) = \frac{1}{b+1} D\, x^{b+1} = \frac{1}{(b+1)} (b+1)\, x^b = x^b.$$

se $b = -1$: $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + c$$

$-\int \operatorname{sen}(x)\,dx = \cos(x) + c$

$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

$D(\operatorname{sen}(x) + c) = \cos(x)$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \operatorname{tg}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + c$$

tabella da imparare a memoria

[Non esiste una formula elementare per $\int e^{-x^2}\,dx$.]

Metodi per calcolare integrali indefiniti:

1) Indovinare una primitiva e controllare, usando le regole per le derivate.

2) Decomposizione in somma:

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = ?$$

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int\left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= x - \ln|x+1| + c.$$

$$\int tg^2(x)\,dx = ?$$

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$
$$sen^2(x) = 1 - cos^2(x)$$

$$\int tg^2(x)\,dx = \int \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}\,dx = \int \frac{1-cos^2(x)}{cos^2(x)}\,dx$$

$$= \int\left(\frac{1}{cos^2(x)} - 1\right)dx = tg(x) - x + c.$$

$$\int \frac{1}{sen(x)\,cos(x)}\,dx = ?$$

$$= \int \frac{sen^2(x) + cos^2(x)}{sen(x)\,cos(x)}\,dx = \int \frac{sen^{\cancel{2}}(x)}{\cancel{sen(x)}\,cos(x)}\,dx + \int \frac{cos^{\cancel{2}}(x)}{sen(x)\,\cancel{cos(x)}}\,dx$$

$$= \int \frac{sen(x)}{cos(x)}\,dx + \int \frac{cos(x)}{sen(x)}\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{cos(x)}\underbrace{(-sen(x))}_{D\,cos(x) = -sen(x)}\,dx + \int \frac{1}{sen(x)}\,cos(x)\,dx$$

$$= -\log|cos(x)| + \log|sen(x)| + c$$

$$D\log|cos(x)| = \frac{1}{cos(x)}(-sen(x))$$

$$= \log\frac{|sen(x)|}{|cos(x)|} + c$$

$$\int \text{sen}^2(x)\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 1\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\text{sen}(2x)\,\frac{1}{2} + c.$$

$$\int \frac{1}{g(x)}\, g'(x)\, dx = \ln|g(x)|$$

Perché valore assoluto? $\boxed{\ln|x| = \frac{1}{x}}$

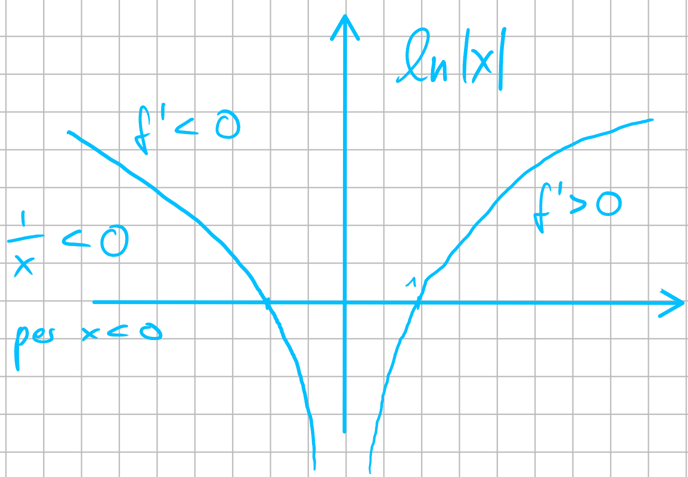
<u>Dimostrazione:</u> per $x>0$: $\ln|x| = \ln x$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

per $x<0$: $\ln|x| = \ln(-x)$

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\,\underbrace{D(-x)}_{=-1}$$

$$= \frac{1}{x}$$



Il frattale di Collatz

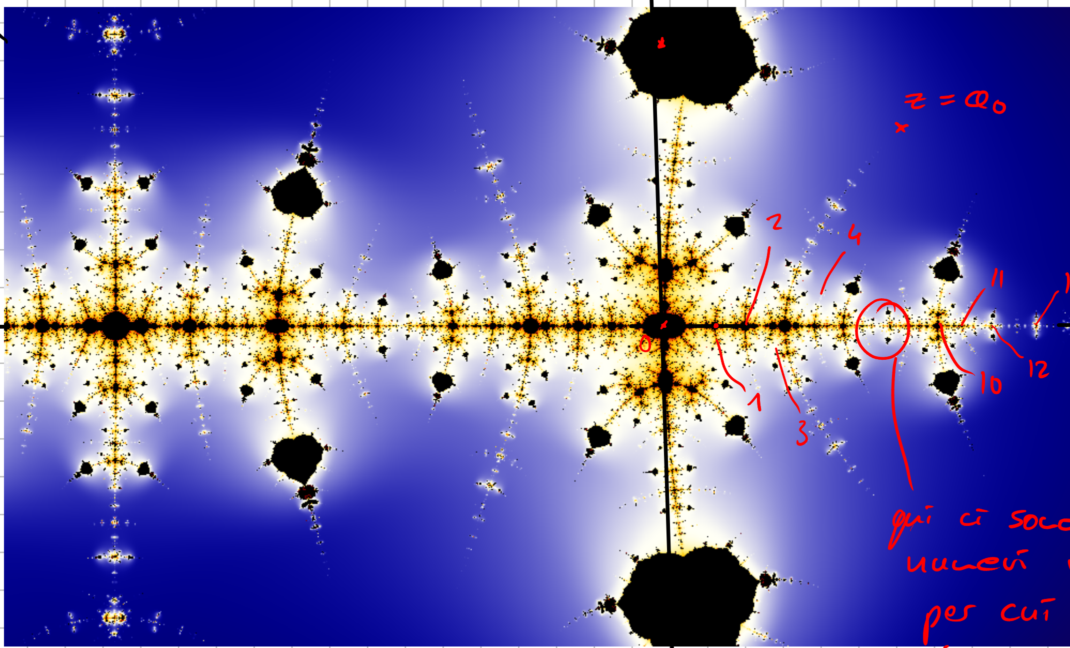
Poniamo $a_0 \in \mathbb{N}$

e $a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{se } a_n \text{ è pari} \\ 3a_n+1 & \text{se } a_n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Esempio: per $a_0 = 17$ otteniamo la successione

$17,\ 3 \cdot 17 + 1 = 52,\ \frac{52}{2} = 26,\ 13,\ 40,\ 20,\ 10,\ 5,\ 16,$
$8,\ 4,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1 \ldots$

piano complesso $\mathbb{C}$



$i\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

$z = a_0$

0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 14 ...

nero: numeri per cui arriviamo in un loop

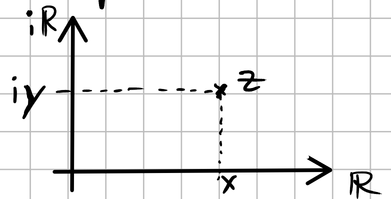
blu: diverge ad $+\infty$ velocemente

giallo: diverge ad $+\infty$ lentamente.

qui ci sono alcuni numeri reali per cui l'iterazione non arriva in un loop.

Il piano complesso: $z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$

$i^2 = -1$



Semplificare: $a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{se } a_n \text{ pari} \\ \frac{3a_n+1}{2} & \text{se } a_n \text{ dispari.} \end{cases}$

Poniamo

$$f_1(z) := \cos^2\left(\frac{\pi}{2} z\right) \qquad z \in \mathbb{R}$$

$$f_2(z) := \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} z\right)$$

Se z è pari: $z = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

allora $f_1(z) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2n\right) = \cos^2(\pi n) = (\pm 1)^2 = 1$.

$f_2(z) = 1 - f_1(z) = 1 - 1 = 0$.

Inoltre: z è dispari: $z = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$:

$$f_1(z) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = \cos^2\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$f_2(z) = 1 - f_1(z) = 1.$$

Allora possiamo usare queste funzioni per distinguere numeri pari e dispari!

Poniamo

$$(*) \quad a_{n+1} := \frac{1}{2} a_n \cos^2\left(\frac{\pi}{2} a_n\right) + \frac{1}{2}(3a_n + 1) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} a_n\right).$$

Con questa formula si può fare l'iterazione anche per $a_0 \in \mathbb{R}$, con numeri reali invece di naturali.

Infatti, $(*)$ vale anche per numeri complessi (se conosciamo la definizione di cos e sen per numeri complessi).
(non fatto a lezione)

più semplice:

Frattale di Mandelbrot

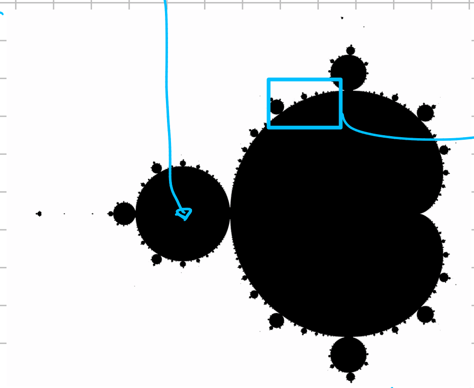
Iterazione di Mandelbrot: $z_0 = 0 \in \mathbb{C}$.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \qquad c \in \mathbb{C}.$$

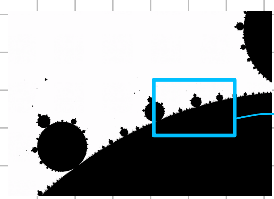
parametro

In nero: valori di $c \in \mathbb{C}$ tale che la successione non diverge ad $+\infty$:

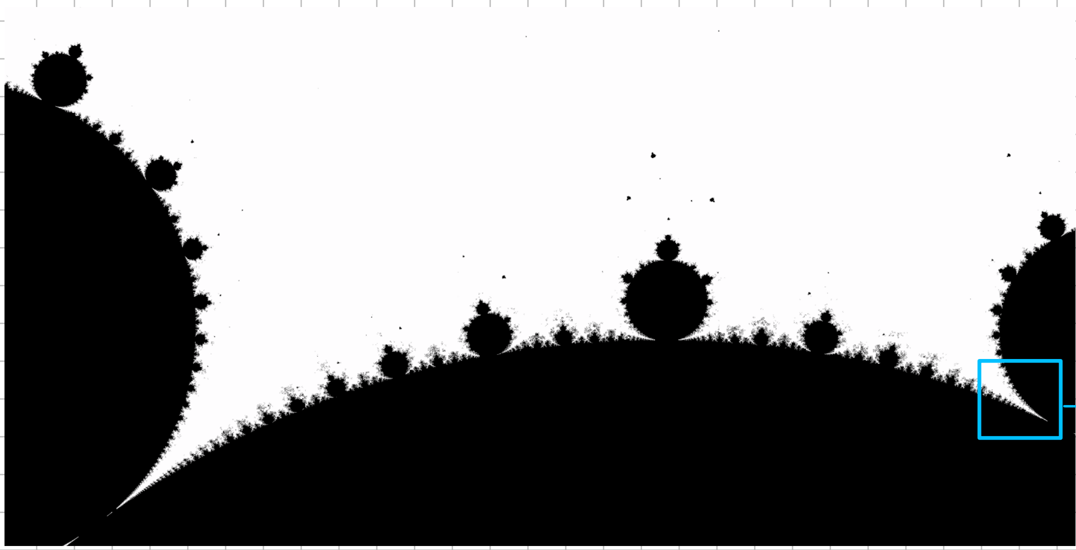
piano complesso



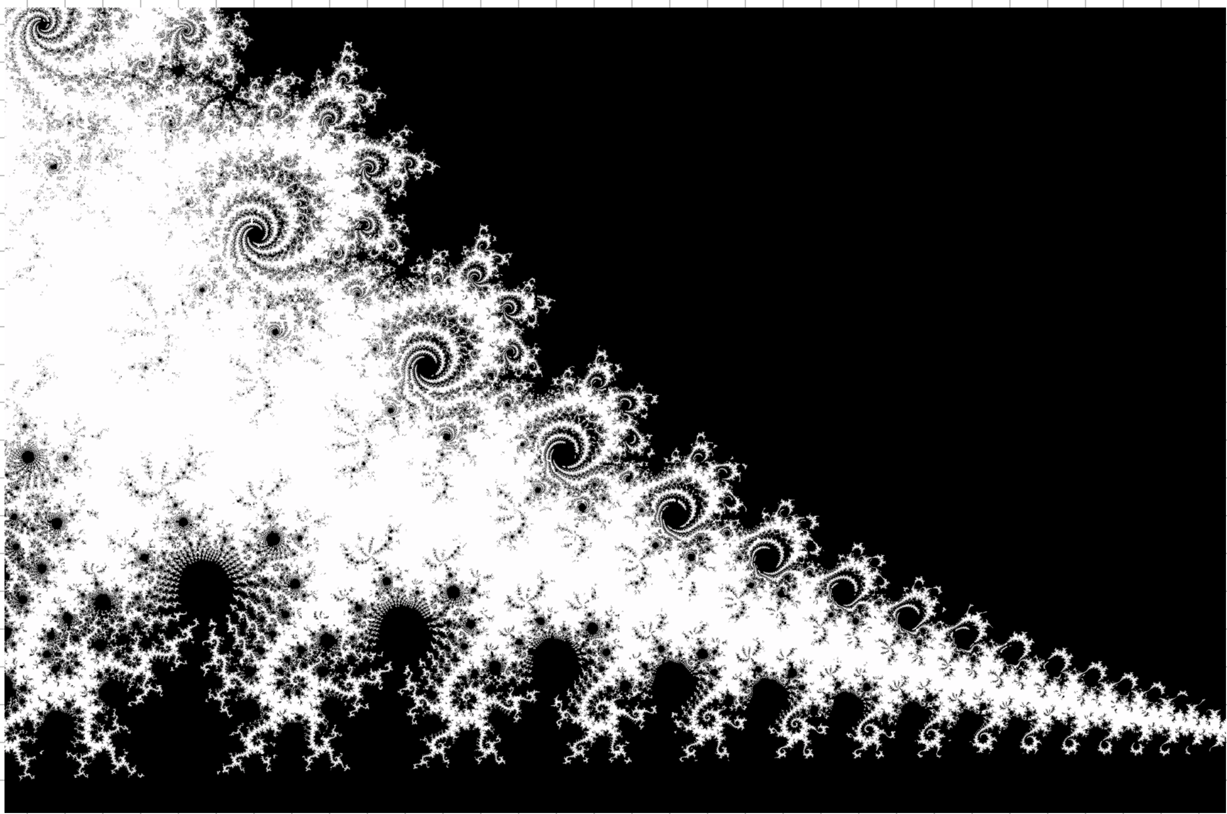
faccio uno zoom



(bianco: numeri $c \in \mathbb{C}$ tale che z_n diverge ad infinito) zoom



zoom



...

Torniamo alla lezione normale adesso:

3) Integrazione delle funzioni razionali:

Una funzione razionale è un rapporto di due polinomi $f(x)$ e $g(x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$(m, n \in \mathbb{N})$.

Se $m > n$: usare divisione tra polinomi per ottenere:

$$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$$

resto: polinomio con grado inferiore al grado di $g(x)$.

$$\Rightarrow \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \underbrace{\int q(x)\,dx}_{\text{integrale di un polinomio: banale.}} + \int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx$$

— Da studiare per la prossima volta: divisione tra polinomi —