Soluzione Esercizi

$\boxed{1}$ (i) $[a,b] = [0,2]$ $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ 2-x & \text{se } \frac{3}{2} < x < 2 . \end{cases}$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^{1/2} x^2\,dx + \int_{1/2}^{3/2} (-1)\,dx + \int_{3/2}^{2} (2-x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{1/2} - \left[x\right]_{1/2}^{3/2} + 2\int_{3/2}^{2} 1\,dx - \int_{3/2}^{2} x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(2 - \frac{3}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{3/2}^{2}$$

$$= \frac{1}{24} \cancel{- 1 + 1} - \left(\frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{24} - 2 + \frac{1}{2}\,\frac{9}{4}$$

(ii) $[a,b] = [-1,1]$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \ne 1 \\ 1 & x = 1 . \end{cases}$

Usiamo la caratterizzazione delle funzioni integrabili:

f è integrabile su $[-1,1]$ se, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists$ partizione P di $[-1,1]$: $S(P) - s(P) < \varepsilon$.

Sia $\varepsilon > 0$. Per costruire una partizione, sia $n \in \mathbb{N}$.

Poniamo
$$P_n := \left(-1, -1 + \frac{(1-(-1))}{n}, -1 + 2\frac{(1-(-1))}{n}, \dots\right)$$
$$= \left(-1, -1 + \frac{2}{n}, -1 + 2\frac{2}{n}, -1 + 3\frac{2}{n}, \dots\right)$$
$$= \left(-1 + k\frac{2}{n} : k \in \{0,1,2,\dots n\}\right)$$
$$= \left(x_k : k \in \{0,1,2,\dots n\}\right).$$

$$s(P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \qquad \begin{cases} m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k-1}]\} \\ \quad = 0 \quad \forall k \end{cases}$$
$$= 0.$$

$$S(P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) \qquad \begin{cases} M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k-1}]\} \\ \quad = \begin{cases} 0 & \forall k = 0,1,2,\dots n-1 \\ 1 & \text{se } k = n . \end{cases} \end{cases}$$
$$= M_n (x_n - x_{n-1}) = 1 \cdot \frac{2}{n}.$$

$\sup\{f(x) : x \in [1-\frac{2}{n}, 1]\} = f(1) = 1.$

$$S(P_n) - s(P_n) = \frac{2}{n} - 0 \xrightarrow[(n \to +\infty)]{} 0$$

per n sufficientemente grande: $S(P_n) - s(P_n) < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ La funzione è integrabile.

$$s(P_n) \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq S(P_n)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.}$$

"Se f è una funzione integrabile in un intervallo $[a,b]$ e se $g(x) = f(x)$ in tutti i punti di $[a,b]\setminus\{c\}$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$."

o un numero finito di punti

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx \qquad f(x) = x^2 + g(x)\cos(x)$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

$$= \int_0^{\pi/2} (x^2 + \cos(x))\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (x^2 - \cos(x))\,dx$$

$$= \underline{\int_0^{\pi/2} x^2\,dx} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx + \underline{\int_{\pi/2}^{\pi} x^2\,dx} - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} x^2\,dx + \Big[\operatorname{sen}(x)\Big]_0^{\pi/2} - \Big[\operatorname{sen}(x)\Big]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^3}{3} + \underbrace{\operatorname{sen}(\pi/2)}_{=1} - \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} - \underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{=0} + \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}$$

$$= 2 + \frac{\pi^3}{3}.$$

iv) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = ?$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

L'integrale <u>non</u> esiste, la funzione non è integrabile.

<u>Dimostrazione:</u>

Sia $P = (x_0, x_1, \dots x_n)$ una partizione dell'intervallo $[0,1]$.

Allora $$S(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k-1}]\} = 1$$

$$\Rightarrow S(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = (\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + (x_3 - \cancel{x_2}) + \dots + (x_n - x_{n-1})$$

$$= x_n - x_0 = b - a = 1 - 0 = 1.$$

$$\Rightarrow S(P) = 1.$$

Invece $$s(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k = 0. \qquad \left\{ \begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k-1}]\} \\ &= 0 \end{aligned} \right.$$

Abbiamo dimostrato: $S(P) = 1$, $s(P) = 0$

per ogni partizione P di $[0,1]$.

Ci ricordiamo: f è integrabile se e <u>solo se</u>

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P : S(P) - s(P) < \varepsilon$.

Con, per esempio, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, una partizione di questo tipo <u>non</u> esiste. Allora f non è integrabile. ∎

$\boxed{2}$ Non è vero! Manca "continuità".

Per capirlo: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in (1,2]. \end{cases}$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx = 0 + 1 = 1$$

Ma per ogni $x_0 \in [0,1]$: $f(x_0)(b-a) = 0\,(2-0) = 0$

per ogni $x_0 \in (1,2]$: $f(x_0)(b-a) = 1 \cdot (2-0) = 2$. ∎

3 (i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-1)(x+3)\,dx = \int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} x^2\,dx + 2\int_{-1}^{1} x\,dx - \int_{-1}^{1} 3\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} + 2\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} - \left[3x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}(-1)^3 + 2\left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right] - \left[3-(-3)\right]$$

$$= \tfrac{2}{3} + 0 - 6 = -6 + \tfrac{2}{3}$$

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x))\,dx$

$F(x) = \cos^2(x)$

$F'(x) = 2\cos(x)\,(-\operatorname{sen}(x))$

non è una primitiva.

$F(x) = \cos(x)\,\operatorname{sen}(x)$ Derivata

$F'(x) = \underbrace{-\operatorname{sen}(x)}_{\text{Derivata}}\,\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\cos(x)$

$= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x).$

$$\int_0^{\pi/2}(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x))\,dx = \left[F(x)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=0}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} = 0.$$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\cdot\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)\,dx$

$f'\,g + f\cdot g'$

$H(x) = f(x)\,g(x)$

$H'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

$H(x) = x\operatorname{sen}(x)$

$H'(x) = \operatorname{sen}(x) + x\cos(x).$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}(x) + x\cos(x))\,dx = \left[H(x)\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - 0 = \tfrac{\pi}{2}.$$

(iv) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = ?$ Forse $\frac{2x}{x^2+1}$ è la Derivata di una funzione composta...

$$2x = D(x^2+1)$$

Allora proviamo con una primitiva del tipo

$$G(x) = f(x^2+1)$$

e dobbiamo ancora trovare la funzione f.

$$G'(x) = f'(x^2+1)\cdot 2x$$

Sembra che vogliamo $f'(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}$.

Allora prendiamo $f(x) = \ln(x)$.

$$\Rightarrow G'(x) = \frac{1}{x^2+1}\,2x$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left[G(x)\right]_{-1}^{1} = \left[\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \ln(2) - \ln(2) = 0.$$ ■

$\boxed{5}$ (i) Se $F' = f$ e $G' = g$, allora $2F - G$ è una primitiva di $2f - g$.

$$D(2F-G) = 2F' - G' = 2f - g.$$ ■

(ii) Dimostrare: $\mathrm{sen}^2(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Da dimostrare: $\mathrm{sen}^2(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2} = 0$.

$$\mathrm{sen}^2(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2} = \mathrm{sen}^2(0) + \frac{1}{2}\cos(0) - \frac{1}{2}$$

formula fondamentale $\longrightarrow$ $$+ \int_0^x \frac{d}{dt}\left(\mathrm{sen}^2(t) + \frac{1}{2}\cos(2t) - \frac{1}{2}\right) dt$$

$$= 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_0^x \left(2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t)\cdot 2\right) dt$$

$$= \int_0^x \underbrace{\left(2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t) + \mathrm{sen}(2t)\right)}_{=0} dt = 0.$$

(formula di addizione) ■

(iii) Se F è primitiva di f, e G di g, $F\cdot G$ è primitiva di $f\cdot g$?

No!

$f(x) = 1$, $g(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x)g(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$F(x) = x$ $(\cancel{+c_1})$
$G(x) = x$ $(\cancel{+c_2})$
per esempio $=0$

$F(x)G(x) = x^2$

$D(F(x)G(x)) = 2x \neq f(x)g(x)$. ■

5 Sia $[a,b] = [\frac{1}{10}, 1]$. $x - \text{sen}(x)\cos(x) > \ \forall x \in [a,b]$.

Studiare su $[a,b]$ la funzione

$$f(x) = \int_{1/10}^{x} \frac{tg(t)}{t}\, dt .$$

Passo 0: dominio $[\frac{1}{10}, 1]$

Passo 1: simmetrie: non rilevate.

Intersezioni assi: $\frac{tg(t)}{t} > 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \supset [\frac{1}{10}, 1]$.

contiene

$f(x) > 0 \quad \forall x \in (\frac{1}{10}, 1]$.

Solo $f(\frac{1}{10}) = \int_{1/10}^{1/10} \frac{tg(t)}{t}\, dt = 0$.

Passo 2: Asintoti non rilevati.

Limiti al bordo del dominio:

$f(\frac{1}{10}) = 0 \qquad f(1) = \int_{1/10}^{1} \frac{tg(t)}{t}\, dt > 0$

(difficile calcolare)

Passo 3: $f'(x) = \frac{tg(x)}{x} > 0$

$\Rightarrow f$ è strettamente crescente.

Non ci sono min/max nell'interno dell'intervallo.

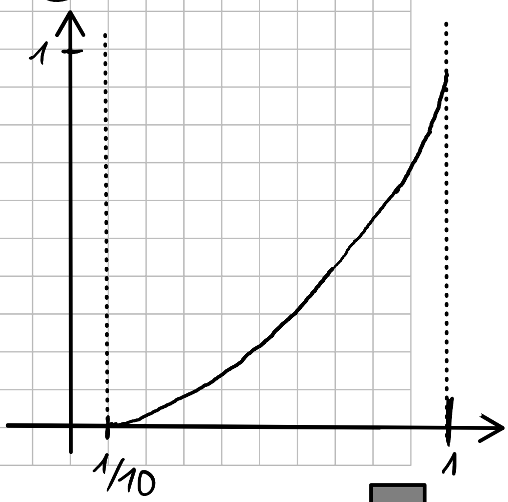
Min assoluto: $f(\frac{1}{10}) = 0$, il max assoluto è $f(1)$.

Passo 4: $f''(x) = \frac{x - \text{sen}(x)\cos(x)}{x^2\cos^2(x)} > 0$

$\Rightarrow f$ è convessa in $[\frac{1}{10}, 1]$.

Non ci sono punti di flesso.

Passo 5: Asint. obliqui: non rilevate.



■

Teorema: Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora f è integrabile sull' $[a,b]$.

Ci ricordiamo: una funzione f è continua in $[a,b]$ se:
$\forall x_0 \in [a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tale che:
$$x \in [a,b] \text{ e } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

⚠ In generale δ dipende da x_0.

__Esempio:__ $f(x) = x^2$ su $\mathbb{R}$. Sia $x_0 \in [a,b]$, sia $\varepsilon > 0$.

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0|$$
$$\leq |x - x_0|\ 2|x_0|$$

per x vicino a x_0: $|x + x_0| < 2|x_0|$

Allora scegliamo: $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2|x_0|}$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0|\ 2|x_0| < \delta\, 2|x_0|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2|x_0|}\, 2|x_0| = \varepsilon.$$

Importante: $\delta = \delta(x_0)$!

Definizione: Si dice che $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è __uniformemente continua__ nell'intervallo I se:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:$$
$$x, \tilde{x} \in I \text{ e } |x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon.$$

δ non dipende da x_0 qui!

__Esempi:__ (i) La funzione $f(x) = x^2$ su $\mathbb{R}$ __non__ è uniformemente continua.

(ii) $f(x) = \cos(x)$ su $\mathbb{R}$ è unif. cont.: Sia $\varepsilon > 0$.

$\tilde{x} = x + h$

$$|\cos(x) - \cos(x+h)|$$
$$= |\cos(x) - \cos(x)\cos(h) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)|$$

formula d'addizione

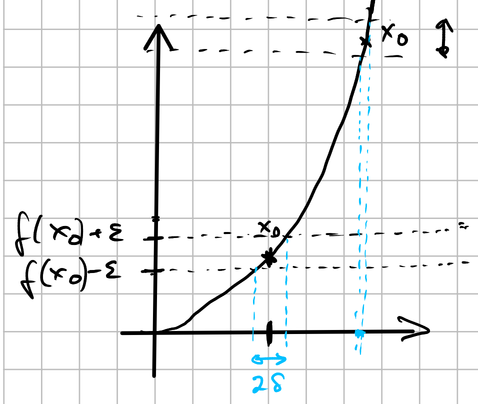
$$\leq \underbrace{|\cos(x)|}_{\leq 1}\, |1 - \cos(h)| + \underbrace{|\operatorname{sen}(x)|}_{\leq 1}\, |\operatorname{sen}(h)|$$
$$\leq |1 - \cos(h)| + |\operatorname{sen}(h)|.$$

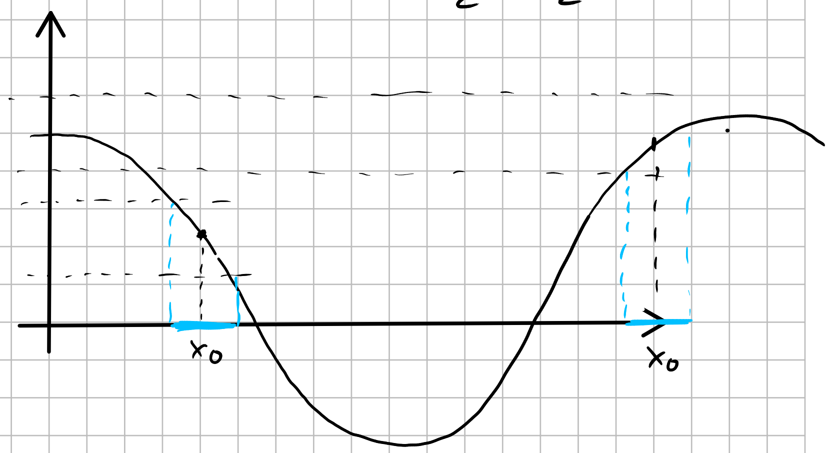
Sappiamo già: $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad |1-\cos(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|\operatorname{sen}(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$

il punto $\tilde{x}$ non entra (solo $h = x - \tilde{x}$)

Allora: $\quad |x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |\cos(x) - \cos(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$





(iii) $f(x) = x^2$ su $[0,1]$ (invece di $\mathbb{R}$):

Come già visto: $|x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0|\, 2\underbrace{|x_0|}_{\leq 1} \leq 2|x - x_0|.$

Sufficiente scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq 2|x - x_0| < 2\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Teorema di Cantor: Sia f continua in $[a,b]$ (chiuso e limitato), allora f è uniformemente continua.

Riguardate: teorema di Bolzano − Weierstrass.

Si usa per la dimostrazione (domani).

Anche per domani: riguardate i numeri complessi

e il gioco

$$\left.\begin{array}{l} a_n \text{ pari} \rightarrow \frac{a_n}{2} \\ a_n \text{ dispari} \rightarrow 3a_n + 1 \end{array}\right\} \text{iterazione}$$

7, 22, 11, 34, 17, 52,
26, 13, 40, 20, 10, 5,
16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1,
4, 2, 1, 4, 2, 1 ...

Proviamo di capire come entra il frattale →