Ex. 43 Un prolungamento continuo esiste se e solo se (1)

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) \quad (\text{e non è } \pm\infty).$$

Limite sinistro: $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{\frac{a}{x}}$.

Ci sono tre possibilità:

(1) Se $a>0$: $\frac{a}{x} \longrightarrow -\infty \Rightarrow e^{\frac{a}{x}} \longrightarrow 0$.

(2) Se $a=0$: $\frac{a}{x} = 0 \Rightarrow e^{\frac{a}{x}} = 1$.

(3) Se $a<0$: $\frac{a}{x} \longrightarrow +\infty \Rightarrow e^{\frac{a}{x}} \longrightarrow +\infty$.

Per il caso (3) non esiste un prolungamento continuo.

Limite destro: $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x^b)}{x e^a} = \frac{1}{e^a} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^b)}{x}$.

Tre possibilità:

(1) $b<0$: $x^b = \frac{1}{x^{|b|}} \xrightarrow[(x\to 0+)]{} +\infty \Rightarrow \ln(1+x^b) \longrightarrow +\infty$.

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+x^b)}{x} \longrightarrow +\infty.$$

Non esiste un prolungamento continuo.

(2) $b=0$: $x^0 = 1$, $\frac{\ln(1+1)}{x} = \frac{\ln(2)}{x} \xrightarrow[(x\to 0+)]{} +\infty$.

Non esiste un prolungamento continuo.

(3) $b>0$: "$\frac{0}{0}$". Usiamo Taylor:

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots = y + o(y^{1.9})$$

$$\Rightarrow \ln(1+x^b) = x^b + o((x^b)^{1.9})$$

$$= x^b + o(x^{1.9b})$$

$$\frac{\ln(1+x^b)}{x} = x^{b-1} + o(x^{1.9b-1})$$

(i) per $b<1$: $x^{b-1} \longrightarrow +\infty$

non esiste un prolungamento continuo.

(ii) per $b=1$: $\frac{\ln(1+x^b)}{x} = 1 + o(x^{0.9b})$
$\longrightarrow 1$

(iii) per $b>1$: $\frac{\ln(1+x^b)}{x} = x^{b-1} + o(x^{1.9b-1})$
$\longrightarrow 0$.

lim sinistro		lim destro	
$a > 0$:	$= 0$	$b = 1$:	$\frac{1}{e^a}$
$a = 0$:	$= 1$	$b > 1$:	0.

- $a > 0$ con $b = 1$: $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$

  $\lim_{x \to 0+} f(x) = \frac{1}{e^a} \neq 0$.

  Non esiste un prolungamento continuo.

- $a > 0$ con $b > 1$: $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x)$.

  Se poniamo $f(0) := 0$, abbiamo trovato un prolungamento continuo.

- $a = 0$ con $b = 1$: $\lim_{x \to 0-} f(x) = 1$

  $\lim_{x \to 0+} f(x) = \frac{1}{e^a}\Big|_{a=0} = \frac{1}{1} = 1$.

  Se poniamo $f(0) := 1$, abbiamo costruito un prolungamento continuo.

- $a = 0$ con $b > 1$: $\lim_{x \to 0-} f(x) = 1$ $\#$

  $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$

  Non esiste un prolungamento continuo.

$\Rightarrow$ Un prolung. continuo esiste se e solo se

- $a > 0$ e $b > 1$

oppure

- $a = 0$ e $b = 1$. $\blacksquare$

[l'Hopital invece di Taylor? per $b > 1$:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(1 + x^b)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{1+x^b} \cdot b x^{b-1}}{1} = \lim_{x \to 0+} b \frac{x^{b-1}}{1 + x^b}$$

$x^{b-1} \to 0$, $x^b \to 0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0+} b \frac{x^{b-1}}{1+x^b} = 0$. ✓]

oppure usando un limite notevole:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x^b)}{x} = \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{\ln(1+x^b)}{x^b}}_{\substack{\text{limite notevole:} \\ \to 1}} \cdot \frac{x^b}{x}$$

vince: $\to 0$ per $b>1$.

Domanda: Continuità della funzione $f(x) = \ln(x)$?

Dominio: $(0, +\infty)$

La funzione è continua in tutto il dominio.

Qual'è $\lim_{x\to 0-} \ln(x)$? Domanda non possibile.

Asintoto verticale nel punto $x=0$? Sì, $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$.

La funzione è continua nel punto $x=0$?

La domanda non ha senso perché $x=0$ non è nel dominio. Non si può dire continua o discontinua fuori dal dominio!

Esiste un prolungamento continuo in $x=0$? Questa domanda è possibile, ma la risposta è no perché $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$.

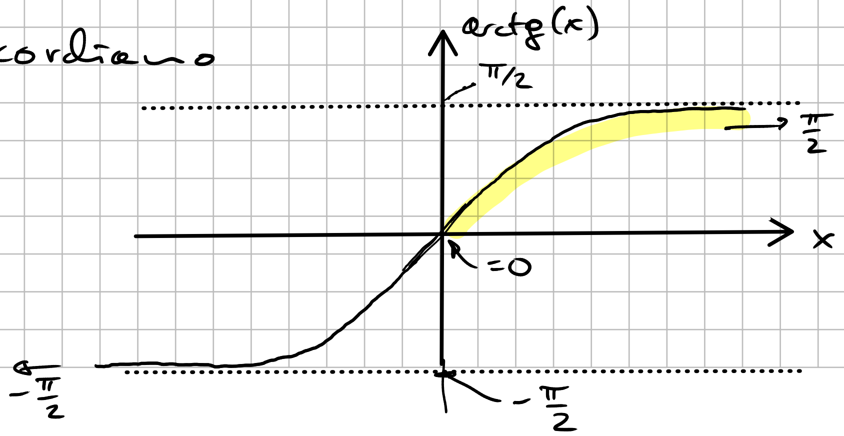
(Allora limite destro non esiste, $-\infty \notin \mathbb{R}$, la funzione diverge.)

Ex. 44 $h(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

<u>Dominio?</u> $\operatorname{arctg}(x)$ è definita per tutti $x \in \mathbb{R}$.

Allora il dominio di $h(x)$ è $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

<u>Limiti?</u> Ricordiamo



$z = \frac{1}{x^2}$

$x \to +\infty$

$z = \frac{1}{x^2} \to 0+$

- $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{z \to 0+} \operatorname{arctg}(z) = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{z \to 0+} \operatorname{arctg}(z) = 0,$
- $\lim_{x \to 0+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{z \to +\infty} \operatorname{arctg}(z) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \to 0-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{z \to +\infty} \operatorname{arctg}(z) = +\frac{\pi}{2}.$

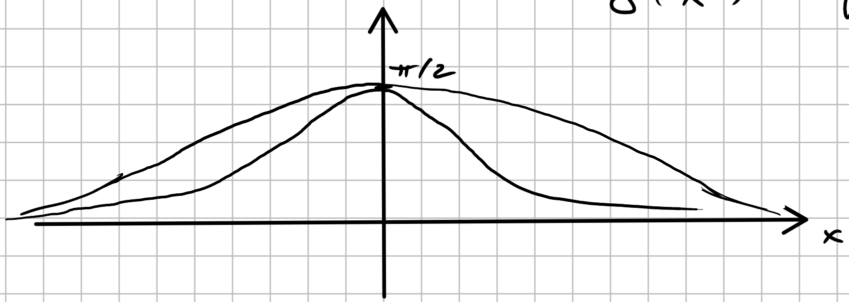
Prolungamento continuo nel punto $x=0$?

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Sì, esiste con $h(0) := \frac{\pi}{2}$.

<u>Grafico qualitativo:</u> • $\forall x \in \mathbb{R}: \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) > 0.$

- $x^2 = (-x)^2 \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ è pari.



- derivabile + continua

$$h'(x) = \frac{d}{dx} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}} \frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right) = \frac{x^4}{x^4+1}(-2)x^{-3}$$

$$= -2\frac{x}{x^4+1}$$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

e ovviamente un massimo.

$\boxed{\text{Ex. 62}}$ $g(x) = e^{-x}(\ln(-x)-1)$ grafico qualitativo?

<u>Dominio:</u> $x < 0$, allora $(-\infty, 0)$.

<u>Punti particolari:</u> intersezione con asse x:

$$e^{-x}(\ln(-x)-1) = 0 \quad | \cdot e^{x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow -x = e^1 = e \quad \Leftrightarrow \boxed{x = -e}$$

<u>Limiti:</u> • $\lim_{x \to -\infty} e^{-x}(\ln(-x)-1)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^{x}}_{\to +\infty}\underbrace{(\ln(x)-1)}_{\to +\infty} = +\infty$$

• $\lim_{x \to 0^-} \underbrace{e^{-x}}_{\to 1}(\underbrace{\ln(-x)}_{\to -\infty}-1) = -\infty.$

<u>Minimi e massimi?</u> $g'(x) = \frac{d}{dx}(e^{-x})(\ln(-x)-1) + e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln(-x)-1)$

$$= -e^{-x}(\ln(-x)-1) + e^{-x}\frac{1}{-x}(-1)$$

$$= -e^{-x}(\ln(-x)-1) + e^{-x}\frac{1}{x}.$$

$g'(x) = 0$?

$$-(\ln(-x)-1) + \frac{1}{x} = 0.$$

$$\iff 1 + \frac{1}{x} = \ln(-x).$$

Una soluzione: $\boxed{x = -1.}$ (indovinare!)

$$g(-1) = e^{-x}(\ln(-x)-1)\Big|_{x=-1} = e(\underbrace{\ln(1)}_{=0}-1) = -e.$$

$\Rightarrow$ retta tangente orizzontale nel punto $x=-1$, $y=-e$.

<u>È un minimo o un massimo?</u>

$$g(x) = e^{-x}(\ln(-x)-1)$$

(1) $\ln(x)$ è strett. crescente $\left(\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} > 0\right)$

$\Rightarrow \ln(-x)$ è strettamente decrescente.

(2) e^{x} è strett. crescente $\left(\frac{d}{dx}e^{x} = e^{x} > 0\right)$.

$\Rightarrow e^{-x}$ è strett. decrescente.

[f_1, f_2 strett. decrescente e positive

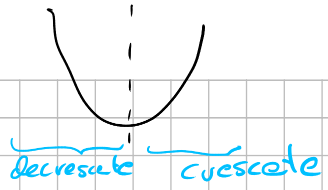
$\Rightarrow f_1 f_2$ strett. decrescente]

[Dimostrazione: $\frac{d}{dx}(f_1 \cdot f_2) = \underbrace{f_1'}_{<0}\underbrace{f_2}_{>0} + \underbrace{f_1}_{>0}\underbrace{f_2'}_{<0} < 0$

$\Rightarrow f_1 \cdot f_2$ strett. decrescente]

$\Rightarrow g(x)$ è strett. decrescente, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Minimo

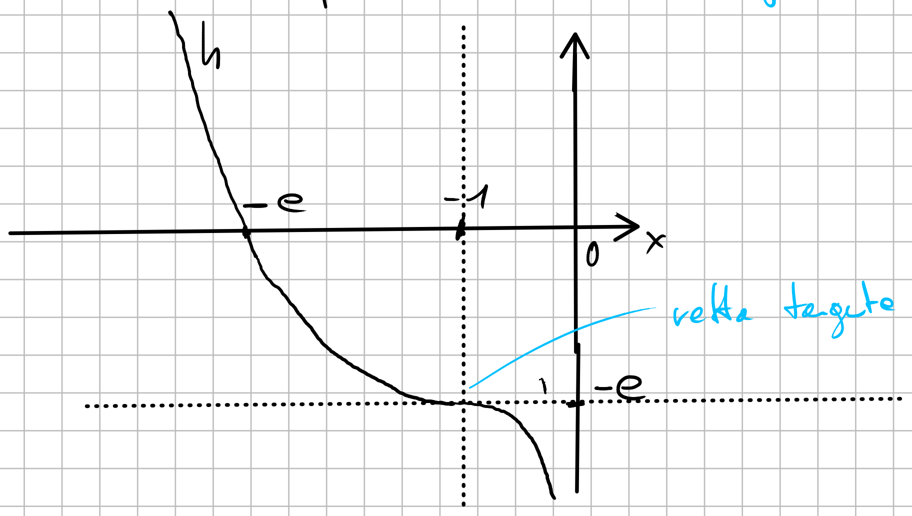


Una funzione decrescente non può avere un minimo o un massimo.

retta tangente orizzontale senza minimo o massimo (funzione è sempre decrescente).

Grafico:

come dimostrato, la funzione è sempre decrescente, allora non può avere minimi o massimi.



$\boxed{\text{Ex. } 63\ (2)}$

$$f(x) = |x^2-1| - \frac{1}{2}x^3.$$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2-\frac{1}{2}x^3 & \text{se } x \in [-1,1] \\ x^2-1-\frac{1}{2}x^3 & \text{se } x \notin [-1,1] \end{cases}$$

attenzione: valore assoluto!

0) dominio: $\mathbb{R}$.

1) Simmetrie, intersezione assi?

$$f(-x) = |(-x)^2-1| - \frac{1}{2}(-x)^3 = |x^2-1| + \frac{1}{2}x^3$$

$$f(x) = |x^2-1| - \frac{1}{2}x^3.$$

né pari, né dispari.

$f(x) = 0$?

per $x \in [-1,1]$: $x^2 \leq 1$

$$f(x) = 1 - x^2 - \frac{1}{2}x^3$$

$$\cancel{f(-\tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{8}}$$

difficile da trovare.

per $x \notin [-1,1]$: $x^2 > 1$

$$f(x) = x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^3$$

$$f(2) = 4 - 1 - \frac{1}{2}8 = -1$$

$$f(-2) = 4 - 1 + \frac{1}{2}8 = 7.$$

stesso problema, difficile da trovare

Con l'asse y? $f(0) = |0-1| - \frac{1}{2}0^3 = |-1| = 1.$

2) asintoti: verticale: non esistono

orizzontale: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} |x^2-1| - \frac{1}{2}x^3 = -\infty.$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} |x^2-1| - \frac{1}{2}x^3 = +\infty.$

3) crescenza, decrescenza, min, max?

Studiamo prima $x<-1$: $f(x) = x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^3.$

$f'(x) = 2x - \frac{3}{2}x^2 = x\left(2 - \frac{3}{2}x\right)$

$f'(0) = 0$ ma $0 \not< -1$ non rilevante

$2 - \frac{3}{2}x = 0 \iff 2 = \frac{3}{2}x \iff x = \frac{4}{3} \not< -1.$

Allora per $x<-1$ non ci sono minimi, massimi.

Per $x \to -\infty$, abbiamo $f(x) \longrightarrow +\infty$. Allora la funzione è decrescente. Siccome mai $f'(x)=0$, allora la derivata deve rimanere negative. (Teorema dell'esistenza degli zeri!)

$\Rightarrow f$ è decrescente per tutti valori di $x<-1$.

per $x>1$: come per $x<-1$; adesso $x=\frac{4}{3}$ è permesso.

È un minimo o un massimo?

$f''(x) = 2 - 3x$ $\quad f''\left(\frac{4}{3}\right) = 2 - 3\frac{4}{3} = -2 \Rightarrow$ un massimo.

Valore del massimo: $f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3$

$= \frac{16\cdot 3}{3^3} - \frac{3^3}{3^3} - \frac{1}{2}\frac{64}{3^3}$

$= \frac{48-27-32}{27} = -\frac{11}{27} > -\frac{11}{22} = -\frac{1}{2}.$

Massimo: $x = \frac{4}{3}$

$y = -\frac{11}{27} > -\frac{1}{2}$

per $-1<x<1$: $f(x) = 1 - x^2 - \frac{1}{2}x^3$

$f'(x) = -2x - \frac{3}{2}x^2 = -x\left(2 + \frac{3}{2}x\right)$

$f'(0) = 0$ $\quad f'\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$ ma $-\frac{4}{3} \notin (-1,1).$

(non rilevante)

$x = 0$ è un minimo o un massimo?

$$f''(x) = -2 - 3x \qquad f''(0) = -2 \Rightarrow \text{un massimo.}$$

Valore del massimo abbiamo già calcolato:

$$f(0) = 1.$$

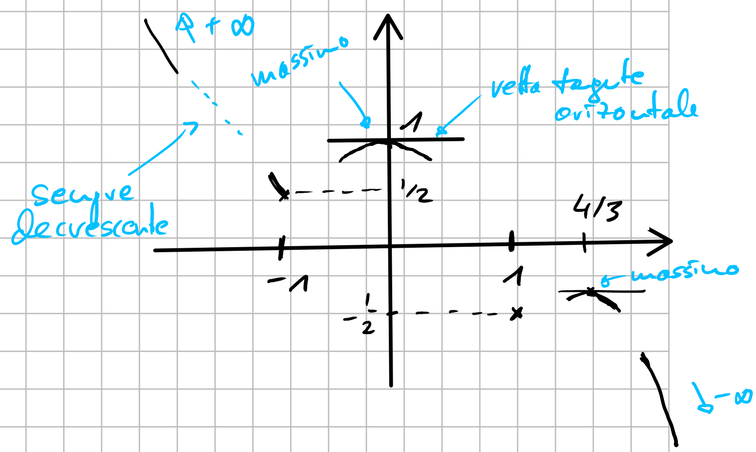
Massimo
$x = 0$
$y = 1$

Punti in cui la funzione non è derivabile:

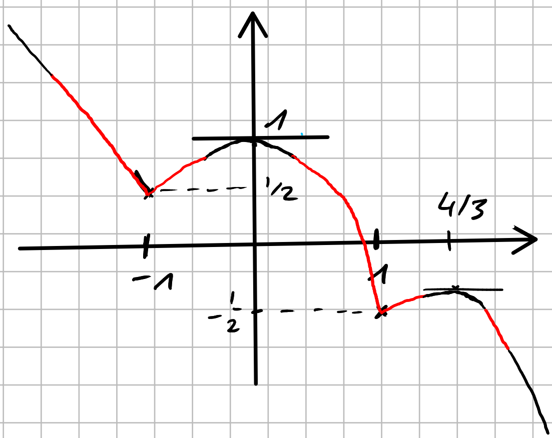
$x = -1$: $\quad f(-1) = -\frac{1}{2}(-1)^3 = \frac{1}{2}.$

$x = 1$: $\quad f(1) = -\frac{1}{2}.$

Informazione a questo punto:



completare il grafico senza introdurre altri minimi/massimi:



$\Rightarrow$ i punti non derivabili $x = -1,\ y = \frac{1}{2}$ e $x = 1,\ y = -\frac{1}{2}$ devono essere minimi!

$\Rightarrow$ **Massimi:**
- $x = 0,\ y = 1$
- $x = \frac{4}{3},\ y = -\frac{11}{27}$

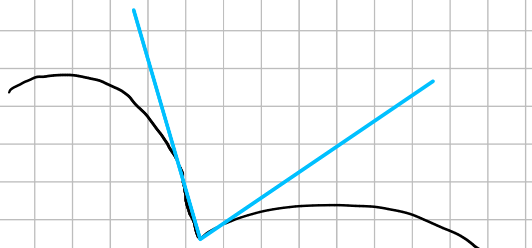
Minimi:
- $x = -1,\ y = \frac{1}{2}$
- $x = 1,\ y = -\frac{1}{2}$

trovato usando teorema di Fermat

non possibile trovare con Fermat (la funzione non è derivabile in $x = \pm 1$)

4) <u>convessità, concavità, punti di flesso:</u> calcolare $f''(x)$ per $x \neq -1$ e $x \neq +1$. (9)

5) <u>asintoti obliqui?</u> interessante anche: le rette tangente alla sinistra e alla destra del punto non derivabile:



$\boxed{\text{Ex. 66 (2)}}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln(x)}$, usando $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

Abbiamo $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$; allora usiamo $e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \dots$
$= 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$ per $y \to 0$.

$y = \frac{\ln(x)}{x}$

$$\frac{x(e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1)}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)}\left(\cancel{1} + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right) - \cancel{1}\right)$$

$$= \frac{x}{\ln(x)}\left(\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)\right)$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0} + \underbrace{o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x(e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1)}{\ln(x)} = 1.$$

Infatti, possiamo anche usare solo $e^y = 1 + y + o(y)$, per $y \to 0$:

$$\Rightarrow \frac{x(e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1)}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)}\left(\frac{\ln(x)}{x} + o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right)$$

con "o piccolo" per $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$

$$= 1 + \underbrace{o(1)}_{\to 0}$$

funzione $= o(1)$ qui vuol dire: $\frac{\text{funzione}}{1} \to 0$ per $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$

(definizione di "o piccolo"!)

(Qui, <u>l'ordine</u> <u>non</u> <u>banale</u> di Taylor è "y" $1 + y$; invece il termine "1" cancella e così non è sufficiente.)