Teorema: (Criterio del confronto)

Supponiamo che nel $[a, +\infty)$ risulti $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a, +\infty)$. Attenzione!

Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ è convergente, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente.

Se invece $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è divergente, anche $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

[Senza dimostrazione a lezione.]

Esempio: L'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente. Perché?

Scriviamo:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^{1} e^{-x^2}\,dx}_{\substack{<+\infty \\ \text{(integrale normale di una funzione continua)}}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx}_{\text{convergente o divergente?}}$$

Osservazione: per $x \ge 1$: $e^{-x^2} \le x\,e^{-x^2}$ solo per $x \ge 1$ ⚠

crit. del confronto $\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le \int_1^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{2}\right)\int_1^{\infty} (-2x)e^{-x^2}\,dx$

$-2x\,dx = dy$

Sostituzione: $y = -x^2$, $dy = -2x\,dx$; $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1$; $x_1 = +\infty \Rightarrow y_1 = -\infty$.

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{-\infty} e^{y}\,dy = -\frac{1}{2}\left[e^{y}\right]_{-1}^{-\infty} = \frac{1}{2}\Big(e^{-1} - \underbrace{\lim_{y\to-\infty} e^{y}}_{=0}\Big) = \frac{1}{2e} < +\infty.$$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente.

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente. ■

non dimenticare!

Teorema: Sia f una funzione positiva, decrescente, e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Poniamo $a_n := f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se l'integrale improprio $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

Esempio: Il comportamento della $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^2}$?

L'integrale associato è

$$\lim_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{1}{x\ln(x)(\ln(\ln(x)))^2}\,dx \qquad \text{(integrale improprio).}$$

La funzione integranda è: positiva? Sì.
decrescente? Sì.
tende ad zero per $x \to +\infty$? Sì.

Per l'integrale è facile decidere usando sostituzione:

$$t := \ln(\ln(x)) \qquad dt = \frac{d}{dx}\ln(\ln(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln(x)} \underbrace{\frac{d}{dx}\ln(x)}_{1/x}\,dx = \frac{1}{x\ln(x)}\,dx.$$

$x_0 = 2 \Rightarrow t_0 = \ln(\ln(2))$

$x_1 = M \Rightarrow t_1 = \ln(\ln(M))$

$$\int_2^M \frac{1}{x\ln(x)(\ln(\ln(x)))^2}\,dx = \int_{\ln(\ln(2))}^{\ln(\ln(M))} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln(\ln(2))}^{\ln(\ln(M))}$$

$$= -\frac{1}{\ln(\ln(M))} + \frac{1}{\ln(\ln(2))}$$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)(\ln(\ln(x)))^2}\,dx = \frac{1}{\ln(\ln(2))} < +\infty.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)(\ln(\ln(n)))^2} < +\infty. \quad \text{Convergente.}$$

∎

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ siccome f è decrescente:

$$f(n+1) \le f(x) \le f(n) \qquad \forall x \in [n, n+1].$$

Allora
$$\underbrace{\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx}_{} \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \underbrace{\int_n^{n+1} f(n)\,dx}_{=f(n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$= f(n+1)\int_n^{n+1} 1\,dx$$

$$= f(n+1)\left((n+1)-n\right) = f(n+1)$$

$$\Rightarrow \quad f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le f(n).$$

Allora $$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \ge \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{n_0}^{n_0+1} f(x)\,dx + \int_{n_0+1}^{n_0+2} f(x)\,dx + \int_{n_0+2}^{n_0+3} f(x)\,dx + \dots = \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \ge \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

In particolare: $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) = +\infty.$

Abbiamo anche

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=n_0-1}^{\infty} f(n+1) \le \sum_{n=n_0-1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_{n_0-1}^{\infty} f(x)\,dx.$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \le \underbrace{\int_{n_0-1}^{n_0} f(x)\,dx}_{} + \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

un integrale normale (intervallo chiuso e limitato), allora un numero finito.

$\Rightarrow$ Se $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$. ■

Formule di Taylor

Teorema: (formula di Taylor con il resto integrale) Sia $n \in \mathbb{N}$. Sia f derivabile $n+1$ volte in $[a,b]$, e sia la $(n+1)$-esima derivata $f^{(n+1)}$ continua, e sia $x_0 \in [a,b]$. Allora

(*) $$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

con il polinomio di Taylor di grado n

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

e la funzione resto $$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

⚠ Notazione: $f^{(n+1)}(x) = (n+1)$-esima derivata ← con parentesi!

per esempio: $f^{(2)}(x) = f''(x)$, $f^{(5)}(x) = f'''''(x)$.

Dimostrazione: Usiamo induzione su $n \in \mathbb{N}$.

$n=0$: (*) diventa: $f(x) = p_0(x) + R_0(x)$ $\quad p_0(x) = f(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt. \qquad R_0(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

È esattamente la formula fondamentale del calcolo integrale, allora è vero.

Supponiamo (*) è vero per $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$.

Dimostriamo che è vero per $n+1$: Usando integrazione per parti:

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{=:\, g'(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{=:\, h(t)}\,dt = \Big[g(t)h(t)\Big]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} g(t)\,h'(t)\,dt$$

pensare di una funzione dipendente da t

$$= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)\,n!} f^{(n+1)}(t)\right]_{t=x_0}^{t=x} - \int\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)\,n!}\right) f^{(n+2)}(t)\,dt$$

$(n+1)\,n! = (n+1)!$

$$= -\overbrace{\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)}^{=0} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + R_{n+1}(x)$$

$x - x = 0$

$$\Longrightarrow \quad R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + R_{n+1}(x).$$

inserire qui

Induzione: (usiamo (*) per n)

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

$$= \underbrace{p_n(x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)}_{= p_{n+1}(x)} + R_{n+1}(x)$$

$\Rightarrow f(x) = p_{n+1}(x) + R_{n+1}(x)$. Abbiamo dimostrato (*) per $n+1$.

Esempio: $f(x) = e^x$,

polinomio di Taylor di grado n nel punto $x_0 = 0$:

$$p_n(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$(0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 1\cdot 2\cdot 3,\ 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4,\ \dots)$

$f(0) = e^0 = 1 \qquad f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 1,\ f'''(0) = 1$

$$\Rightarrow \quad p_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots + \frac{1}{n!} x^n.$$

Il resto: Sia x fisso.

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{= e^t} \, dt \right| \le \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} e^t \, dt$$

$t \in [0,x] \Rightarrow t < x$

$$\le \int_0^x \frac{(x+t)^n}{n!} e^t \, dt \le \int_0^x \frac{(2x)^n}{n!} e^x \, dt = \frac{(2x)^n}{n!} e^x \underbrace{\int_0^x dt}_{= x}$$

$$\Rightarrow \quad |R_n(x)| \le \frac{(2x)^n}{n!} e^x x \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \longrightarrow +\infty$$

(x fisso).

$$\Rightarrow \quad \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

la serie esponenziale

Altri esempi importanti:

da sapere a memoria

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

$$\mathrm{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\mathrm{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

senza fattoriale

Definizione: "o piccolo"

"o" come "ordine"

Per due funzioni f, g si scrive $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

normalmente usato solo se $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Esempio: $\mathrm{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$

$$\frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = o(x^4) \quad \text{per } x \to 0.$$

Perché? $\frac{1}{5!}x^5 = o(x^4)$ per $x \to 0$ $\iff \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{5!}x^5}{x^4} = 0$

È vero? $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{5!}x^5}{x^4} = \frac{1}{5!} \lim_{x \to 0} x = 0$. Sì.

$$\boxed{\Rightarrow \mathrm{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)}$$

$$\mathrm{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6).$$

$$\mathrm{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^8).$$

Uso della formula di Taylor nel calcolo di limiti:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\,\mathrm{sen}(x)} \right)$$

"forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$"
$\frac{1}{x^2} \to +\infty$, $\frac{1}{x\,\mathrm{sen}(x)} \to +\infty$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\,\mathrm{sen}(x)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\mathrm{sen}(x) - x}{x^2\,\mathrm{sen}(x)} \right)$$

ancora una forma indeterminata

Usiamo Taylor: $\mathrm{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$:

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\left(-\frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^4)}{x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^6)} \right) \qquad \begin{array}{l} 1 : x^3 \\ 1 : x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{x^3}\, o(x^4) = o(x) \\ x^2\, o(x^4) = o(x^6) \end{array}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\frac{1}{6} + o(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} \right)$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6} + o(x)\right)}{\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)} = \frac{-\frac{1}{6}}{1} = -\frac{1}{6} \qquad \blacksquare$$

Domanda: se uso solo $\operatorname{sen}(x) = x + o(x^2)$?

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2 \operatorname{sen}(x)} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x + o(x^2) - x}{x^2\left(x + o(x^2)\right)} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{o(x^2)}{x^3 + o(x^4)} \right)$$

Ancora una forma indeterminata del tipo "$\frac{0}{0}$" (pensiamo di $o(x^2) \to 0$ e $x^3 \to 0$!).

Allora $\operatorname{sen}(x) = x + o(x^2)$ non è sufficiente per decidere.

Se uso $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7)$?

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2 \operatorname{sen}(x)} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7) - \cancel{x}}{x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7)\right)} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7)}{x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{5!} + o(x^9)} \right) \qquad \begin{array}{l} 1 : x^3 \\ 1 : x^3 \end{array}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{5!} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + o(x^6)} \right)$$

adesso è una forma determinata!

$$= \frac{-\frac{1}{6}}{1} = -\frac{1}{6}.$$

Il risultato rimane giusto, ma abbiamo lavorato di più.

Il metodo usando Taylor è molto utile per limiti con funzioni composti, per esempio:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} \qquad \left(\text{tipo qui: } \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"}\right). \longrightarrow \text{Esercizio.}$$

—— Fine materiale per esame 30 maggio (ma esercizio incluso!) ——