Soluzione Esercizio VI

Problema 1 Dimostra: se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e dispari, allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ per ogni $a > 0$.

Soluzione:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} \underbrace{f(-x)}_{\substack{f \text{ dispari:} \\ f(-x) = -f(x)}}\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Perché $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$?

Possibilità per la dimostrazione: (i) $S(P), s(P)$ (lungo conto)

(ii) usando sostituzione (oggi a lezione)

(iii) usando la primitiva:

Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, $F' = f$.

Allora $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-a)$. $(*)$

Forse $F(-x)$ è una primitiva di $f(-x)$?

$$\frac{d}{dx} F(-x) = F'(-x) \frac{d}{dx}(-x) = -f(-x). \quad \text{No!}$$

Ma $-F(-x)$ è: $\frac{d}{dx}(-F(-x)) = f(-x)$.

$$\Rightarrow \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = \left[-F(-x)\right]_{0}^{a} = -F(-a) - (-F(-0))$$

$$= F(0) - F(-a) \overset{(*)}{=} \int_{-a}^{0} f(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

Problema 2: (1) Sia $b \neq -1$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivata continua.

Dimostra:

$$\int (f(x))^{b} f'(x)\,dx = \frac{1}{b+1} (f(x))^{b+1} + C.$$

Dimostrazione: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{b+1}(f(x))^{b+1}+c\right)$

formule per la derivata di una funzione composta.

$$= \frac{1}{\cancel{b+1}}\cancel{(b+1)}(f(x))^{b} f'(x) = (f(x))^{b} f'(x).$$

$\blacksquare$

(2) $\int tg(x)\,dx$:

$$\int tg(x)\,dx = \int \frac{sen(x)}{cos(x)}\,dx = \int \frac{1}{cos(x)}\,sen(x)\,dx$$

derivata di $cos(x)$: $-sen(x)$.

Ci ricordiamo: $D\ ln|x| = \frac{1}{x}$.

Proviamo con $F(x) = ln|cos(x)|$:

$$DF(x) = \frac{1}{cos(x)}\,D\,cos(x) = \frac{1}{cos(x)}(-sen(x)).$$

$\boxed{D\ ln|x| = \frac{1}{x}}$

$F(x) = -ln|cos(x)|$:

$$DF(x) = \frac{1}{cos(x)}\,sen(x)$$

$$\Rightarrow \int tg(x) = -ln|cos(x)| + c.$$

$\blacksquare$

(3) $\int_2^{10} \frac{3x^2}{5x^2+2}\,x\,dx$:

$$\int \frac{3x^2}{5x^2+2}\,x\,dx = \frac{3}{5}\int \frac{x^2}{x^2+2/5}\,x\,dx$$

inserire $+\frac{2}{5} - \frac{2}{5}$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{x^2+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}}{x^2+\frac{2}{5}}\,x\,dx = \frac{3}{5}\int\left(1-\frac{2/5}{x^2+2/5}\right)x\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\int x\,dx - \frac{3}{25}\int \frac{1}{x^2+\frac{2}{5}}\,2x\,dx$$

Derivata di $x^2+\frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}x^2$ primitiva

$$F(x) = ln\left|x^2+\frac{2}{5}\right| + c$$

$$DF(x) = \frac{1}{x^2+\frac{2}{5}}\,D\left(x^2+\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{x^2+\frac{2}{5}}\,2x$$

$$= \frac{3}{5}\,\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{3}{25}\,ln\left|x^2+\frac{2}{5}\right| + c$$

$$= \int \frac{3x^2}{5x^2+2}\,x\,dx$$

$$\int_2^{10} \frac{3x^2}{5x^2+2} \, x \, dx = \left[\frac{3}{10} x^2 - \frac{3}{25} \ln \left| x^2 + \frac{2}{5} \right| \right]_2^{10}$$

$$= 30 - \frac{3}{25} \ln \left| 100 + \frac{2}{5} \right| - \frac{6}{5} + \frac{3}{25} \ln \left| 4 + \frac{2}{5} \right|$$

$$= 30 - \frac{6}{5} + \frac{3}{25} \ln \left| \frac{4 + 2/5}{100 + 2/5} \right| .$$

$\blacksquare$

Problema 3: f è lipschitziana se esiste una $L > 0$:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \le L |x - \tilde{x}| \quad \forall x, \tilde{x} \text{ nel dominio di } f.$$

(1) Dimostra: una funzione lipschitziana è uniformemente continua.

<u>Soluzione:</u> Uniformemente continua significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x, \tilde{x} \in I \text{ con } |x - \tilde{x}| < \delta :$$
$$|f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon.$$

Dimostrazione: Sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$.

Quindi:

$$|x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| \overset{\text{lipschitziana}}{\le} L |x - \tilde{x}|$$
$$< L\delta = L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

$\blacksquare$

(2) Sia f derivabile in I. Allora f è lipschitziana con costante L se e solo se $|f'(x)| \le L \ \forall x \in I$.

<u>Dimostrazione:</u>

<u>"$\Rightarrow$":</u> f lipschitziana: $|f(x) - f(\tilde{x})| \le L |x - \tilde{x}|$.

Allora

$$|f'(x)| = \left| \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|$$

$$\le \lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \le \lim_{h \to 0} \frac{L |(x+h) - x|}{|h|}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{L \cancel{|h|}}{\cancel{|h|}} = L. \quad \Rightarrow \quad |f'(x)| \le L.$$

<u>"$\Leftarrow$":</u> Usiamo il teorema di Lagrange:

Per ogni a,b nell'interno di I: esiste $x_0 \in (a,b)$ per cui: $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

In particolare, per $x, \tilde{x}$ nell'interno di I esiste $x_0 = x_0(x,\tilde{x})$ tale che: $\dfrac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x} = f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \quad f(\tilde{x})-f(x) = f'(x_0)(\tilde{x}-x)$$

$$\Rightarrow \quad |f(\tilde{x})-f(x)| = \underbrace{|f'(x_0)|}_{\leq L \text{ per l'ipotesi}}|\tilde{x}-x| \leq L|\tilde{x}-x|.$$

LEZIONE

5) Integrazione per sostituzione

Integrazione per sostituzione: Sia f una funzione continua e g una funzione derivabile con derivata continua. Risulta

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=g(t)}$$

Se $\int f(x)dx = F(x)+c$, allora

Dimostrazione: Esercizio VII.

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=g(t)} = F(x)+c\Big|_{x=g(t)} := F(g(t))+c.$$

Per ricordarsi della formula: non dimostrare!

(1) $x = g(t)$ $\qquad \dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ $\qquad$ (2) "$dx = \boxed{g'(t)}\,dt$"

(3) $t = g^{-1}(t)$.

Esempi:

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,dx$ $\qquad$ Sostituzione: $x := t^2 = g(t)$ $\quad \sqrt{x}=t$

$$dx = \boxed{g'(t)}\,dt = \boxed{2t}\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,dx \overset{\text{passo (1) } x=t^2}{=} \int \frac{1}{t-3}\,\boxed{2t}\,dt = 2\int \frac{t-3+3}{t-3}\,dt$$

passo (2) $dx = 2t\,dt$

$$= 2\left(\int 1\,dt + 3\int \frac{1}{t-3}\,dt\right)$$

$$= 2\,(t + 3\ln|t-3| + c) \quad \xrightarrow{\text{passo (3)}} \quad t = \sqrt{x}$$

$$= 2\sqrt{x} + 6\ln|\sqrt{x}-3| + c.$$

Controllare il nostro risultato: calcoliamo la derivata:

$$\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x} + 6\ln|\sqrt{x}-3| + c\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(2x^{1/2}\right) + 6\,\frac{1}{\sqrt{x}-3}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}-3\right)$$

$$= 2\,\frac{1}{2}\,x^{-1/2} + 6\,\frac{1}{\sqrt{x}-3}\,\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\,\frac{1}{\sqrt{x}-3}\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{x}-3}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}}\left(\frac{\cancel{\sqrt{x}}\cancel{-3}}{\sqrt{x}-3} + \frac{\cancel{3}}{\sqrt{x}-3}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}-3}.$$

- $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{2x-1}}{x-\sqrt{2x-1}}\,dx$:

Sostituzione: $2x-1 =: t^2$

⚠ bisogno di $x = g(t)$

$$x = \frac{t^2+1}{2} =: g(t).$$

$$dx = g'(t)\,dt = t\,dt$$

$$\int \frac{x+\sqrt{2x-1}}{x-\sqrt{2x-1}}\,dx \underset{x=\frac{t^2+1}{2}}{=} \int \frac{\frac{t^2+1}{2}+\sqrt{t^2}}{\frac{t^2+1}{2}-\sqrt{t^2}}\,t\,dt$$

⚠ non dimenticare

$$= \int \frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}(t^2+1+2t)}{\cancel{\tfrac{1}{2}}(t^2+1-2t)}\,t\,dt = \int \frac{t^2+1+2t}{t^2+1-2t}\,t\,dt$$

$$= \int \frac{t^3+2t^2+t}{t^2-2t+1}\,dt$$

Integrale di una funzione razionale

→ capitolo su integrale funzioni razionali: Esercizio VII.

$$= \frac{t^2}{2} + 4t + 8\ln|t-1| - \frac{4}{t-1} + c \quad \longrightarrow \quad t = \sqrt{2x-1}$$

$$= \frac{2x-1}{2} + 4\sqrt{2x-1} + 8\ln\left|\sqrt{2x-1}-1\right| - \frac{4}{\sqrt{2x-1}-1} + c.$$

- $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$:

$1-x^2 =: t^2$?

$x^2 = 1-t^2 \qquad x = \sqrt{1-t^2} = g(t)$

$$dx = \frac{1}{\cancel{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(-\cancel{2}t)\,dt = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int t\left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt = -\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

forse più complicato del risultato con cui abbiamo cominciato!

Proviamo con un'altra sostituzione:

$$\boxed{x = \operatorname{sen}(t)} \qquad dx = \cos(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}\,\cos(t)\,dt$$

$$= \int \sqrt{\cos^2(t)}\,\cos(t)\,dt = \int \cos^2(t)\,dt$$

$=$ già visto, usando int. per parti

$$\frac{1}{2}\left(t + \operatorname{sen}(t)\cos(t)\right) + c$$

$t = \operatorname{arcsen}(x)$

$$= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arcsen}(x) + \underbrace{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x))}_{=x}\ \underbrace{\cos(\operatorname{arcsen}(x))}_{=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen}(x))} = \sqrt{1-x^2}}\Big) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right) + c.$$

Integrazione per sostituzione per integrali Definiti:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\,g'(t)\,dt \overset{x = g(t)}{=} \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx$$

$x = g(t)$, $\quad dx = g'(t)\,dt$, $\quad x_0 = g(t_0)$, $x_1 = g(t_1)$ } non dimenticare ⚠

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$: $x = \operatorname{sen}(t)$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = -1 = \operatorname{sen}(t_0) \\ t_0 = ? \\ \qquad t_0 = -\frac{\pi}{2} \\ x_1 = 1 = \operatorname{sen}(t_1) \\ t_1 = \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(t + \operatorname{sen}(t)\cos(t)\right) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Menti:

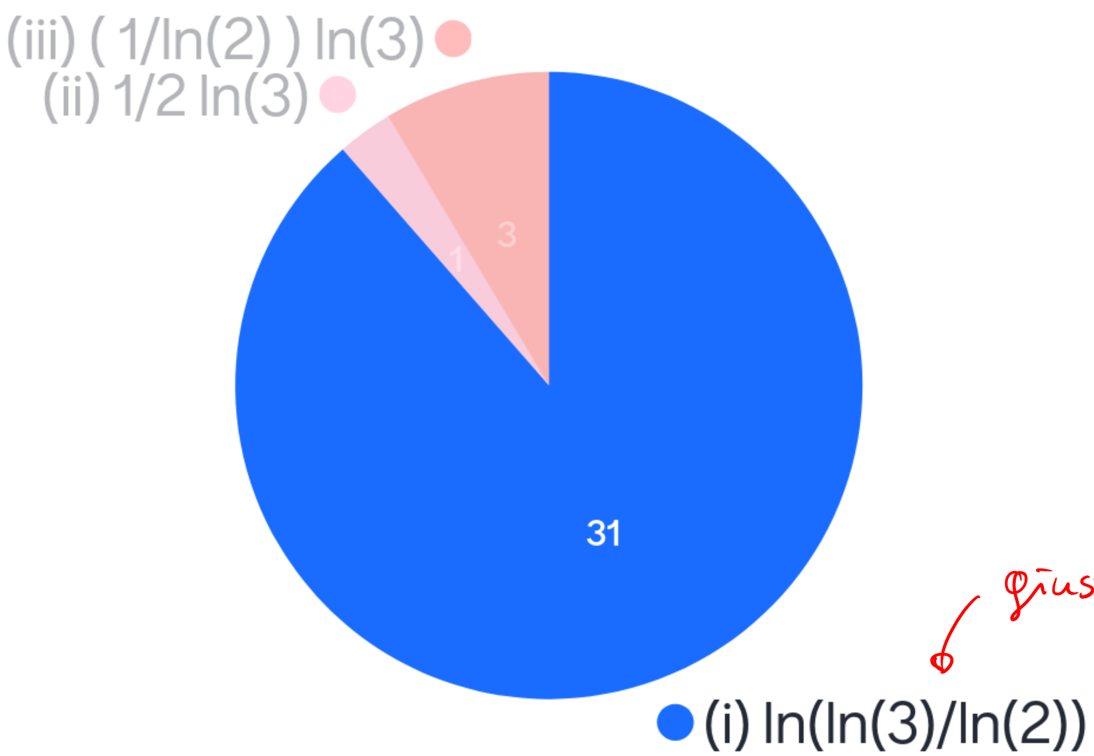
Qual'è l'integrale seguente?

$$\int_2^3 \frac{1}{x \log(x)} \mathrm{d}x \,.$$

La soluzione è

(i) $\ln\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)$, (ii) $\frac{1}{2}\ln(3)$, (iii) $\frac{1}{\ln(2)}\ln(3)$.

Risposte:



giusto

Soluzione del Metri:

Metodo 1: $\int \frac{1}{x \ln(x)} \, dx$

$$t = \ln(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= e^t =: g(t) \\ dx &= g'(t)\,dt = e^t\,dt \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{e^t}\, t} \cancel{e^t}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \ln|t| \qquad t = \ln(x)$$

$$= \ln|\ln(x)|$$

$$\Rightarrow \int_2^3 \frac{1}{x \ln(x)}\, dx = \Big[\ln|\ln(x)|\Big]_{x_0=2}^{x_1=3} = \ln|\ln(3)| - \ln|\ln(2)|$$

$$= \ln\left|\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right| = \ln\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)$$

$\ln(3) > 0$ e $\ln(2) > 0$.

Metodo 2: $\int_2^3 \frac{1}{x \ln(x)}\, dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{t}\, dt$

$$x_0 = 2 \rightsquigarrow t_0 = ?$$

$$\boxed{\begin{aligned} t_0 &= \ln(x_0) = \ln(2) \\ t_1 &= \ln(x_1) = \ln(3) \end{aligned}}$$

$$= \Big[\ln|t|\Big]_{t_0=\ln(2)}^{t_1=\ln(3)}$$

$$= \ln|\ln(3)| - \ln|\ln(2)| = \ln\left|\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right| = \ln\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right).$$

$\blacksquare$