3) Integrazione delle funzioni razionali

Una funzione razionale è un rapporto di due polinomi f, g:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Se $m \geq n$ usiamo divisione tra polinomi:

$$f(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$$

$r(x)$ ← resto: polinomio di grado inferiore al grado del divisore $g(x)$.

$$\Rightarrow \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{g(x)\,q(x) + r(x)}{g(x)}\,dx$$

$$= \underbrace{\int q(x)\,dx}_{\substack{\text{integrale di}\\ \text{un polinomio}\\ \text{(banale)}}} + \underbrace{\int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx}_{\substack{\text{integrale di una funzione}\\ \text{razionale con grado del numeratore}\\ \text{meno al grado del denominatore.}}}$$

$\boxed{\text{Esempio:}}$ **Divisione tra polinomi:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1}$$

Lo scriviamo: (da calcolare: $q(x)$)

$$x^5 - 3x^4 + x + 3 = (x^2-1)(x^3 - 3x^2 + x - 3) + 2x$$

$$\begin{array}{l}
x^5 - 3x^4 + x + 3 \\
-(x^5 - x^3) \\
\hline
-3x^4 + x^3 + x + 3 \\
-(-3x^4 + 3x^2) \\
\hline
x^3 - 3x^2 + x + 3 \\
-(x^3 - x) \\
\hline
-3x^2 + 2x + 3 \\
-(-3x^2 + 3) \\
\hline
2x
\end{array}$$

$2x$: resto $r(x)$

Importante: fare il controllo di calcolare il prodotto del risultato.

$$\Rightarrow f(x) = x^5 - 3x^4 + x + 3 = g(x)\,q(x) + r(x)$$

$$\begin{cases} g(x) = x^2 - 1 \\ q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \\ r(x) = 2x. \end{cases}$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx$$

$$= \underbrace{\int (x^3-3x^2+x-3)\,dx}_{=\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + c} + \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

qui: "tipo funzione composta"

$$= \ln|x^2-1| + c.$$

In generale:

Rimane calcolare $\int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx$ con grado del numeratore inferiore al grado del denominatore:

Qui, per semplicità, solo per il caso in cui $g(x)$ è un polinomio di grado 2:

$$\int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{dx+e}{ax^2+bx+c}\,dx, \quad a,b,c,d,e \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

① Primo caso: $g(x)$ ha due radici reali distinti:

Esempio: $\frac{x+7}{x^2-x-2}$ $\qquad x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$

Proviamo di trovare $A, B \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\frac{1x+7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{x^2-x-2}$$

Dobbiamo risolvere:

$$A + B = 1$$
$$-2A + B = 7$$

$\Rightarrow A = 1 - B$

$\Rightarrow -2(1-B) + B = 7 \Rightarrow B = 3$

$\Rightarrow A = -2.$

$$\Rightarrow \int \frac{x+7}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{-2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-2}\,dx .$$

$$= -2\int \frac{1}{x+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -2\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + C .$$

(ii) <u>una radice doppia:</u> Esempio: $\dfrac{x}{x^2+2x+1}$

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

Qui usiamo: $\dfrac{x}{x^2+2x+1} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x+1)^2}$.

Calcolare A, B come per (i) e calcolare l'integrale.

Dettagli $\longrightarrow$ Esercizio VII !

(iii) <u>$g(x)$ non ha radici reali:</u>

Esempio: $\dfrac{1-2x}{x^2+2x+5} = \dfrac{A(\text{derivata del denominatore})+B}{x^2+2x+5}$

$$= \frac{A(2x+2)+B}{x^2+2x+5}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2A = -2 \\ 2A+B = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-2x}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{(-1)(2x+2)+3}{x^2+2x+5}\,dx$$

usare "integrale del tipo funzione composta".

Dettagli $\longrightarrow$ Esercizio VII !

4) Integrazione per parti:

Formula di Int. per parti: Se f, g sono due funzioni derivabili con derivata continua, risulta

$$\int f(x)\underbrace{g'(x)\,dx} = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx .$$

$g(x) = \int g'(x)\,dx$

Dimostrazione: Partiamo dalla formula di derivazione del prodotto: $\left(f(x)\,g(x)\right)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

Calcoliamo gli integrali indefiniti:

$$f(x)\,g(x) + c = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx.$$

per $c=0$: diventa la formula scritta. $\blacksquare$

Esempi: • $\underline{\int x\cos(x)\,dx}$ Poniamo $f(x) := x$

$g'(x) := \cos(x)$.

Quindi: $g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

$$\Rightarrow \underset{\int f \quad g'}{\int x \cos(x)\,dx} = \underset{f\ g}{x\operatorname{sen}(x)} - \underset{\int f' g}{\int 1\operatorname{sen}(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \int x\cos(x)\,dx = x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$= x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C. \quad \blacksquare$$

• $\underline{\int x^2\cos(x)\,dx}$: $f(x) := x^2$, $g'(x) := \cos(x)$

$g(x) = \int g'(x) = \operatorname{sen}(x)\ (+c)$.

$$\underset{f \quad g'}{\int x^2\cos(x)\,dx} = \underset{f\ g}{x^2\operatorname{sen}(x)} - \underset{\int f' g}{\int \underline{2x\operatorname{sen}(x)\,dx}}$$

Integriamo di nuovo per parti:

$\int x\operatorname{sen}(x)\,dx$ $f(x) := x$, $g'(x) = \operatorname{sen}(x)$

$g(x) = \int \operatorname{sen}(x)\,dx$

$= -\cos(x)\ (+c)$

$$\Rightarrow \underset{f \quad g'}{\int \underline{x\operatorname{sen}(x)\,dx}} = \underset{f\ g}{x\left(-\cos(x)\right)} - \underset{\int f' g}{\int 1\left(-\cos(x)\right)dx}$$

$$= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$

$$= -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C$$

$$\Rightarrow \int x^2\cos(x)\,dx = x^2\operatorname{sen}(x) - 2\left(-x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C\right)$$

$$= x^2\operatorname{sen}(x) + 2x\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x) + C. \quad \blacksquare$$

$\int \ln(x)\,dx$:

trucco importante

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{=:\, f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx$$

$$f(x) = \ln(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$g'(x) = 1$$
$$g(x) = \int 1\,dx = x$$

$$= \underset{f}{\ln(x)}\,\underset{g}{x} - \underset{\int f' g}{\int \frac{1}{x}\,x\,dx}$$

$$= \ln(x)\,x - \int 1\,dx = \ln(x)\,x - x + c. \quad \blacksquare$$

$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$:

(*) $$\int \underset{f}{e^x}\,\underset{g'}{\operatorname{sen}(x)}\,dx = \underset{f\,g}{e^x(-\cos(x))} - \underset{\int f' g}{\int e^x(-\cos(x))\,dx}$$

$$= -e^x\cos(x) + \int e^x \cos(x)\,dx.$$

di nuovo integ. per parti

$$\int \underset{f}{e^x}\,\underset{g'}{\cos(x)}\,dx = \underset{f\,g}{e^x \operatorname{sen}(x)} - \underset{\int f' g}{\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx}$$

inserire in (*)

$$\Rightarrow \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = -e^x\cos(x) + e^x\operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx$$

risolvere l'equazione per l'integrale!

$$\Rightarrow 2\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = -e^x\cos(x) + e^x\operatorname{sen}(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$:2$

$$\Rightarrow \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = e^x\left(\frac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{2}\right) + c$$

$$= \frac{e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x))}{2} + c$$

Simile: $\int \cos^2(x)\,dx$:

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$$
$$g'(x) = \cos(x) \Rightarrow g(x) = \int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x).$$

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \underset{f}{\cos(x)}\,\underset{g'}{\cos(x)}\,dx$$

$$= \cos(x)\,\mathrm{sen}(x) - \int (-\mathrm{sen}(x))\,\mathrm{sen}(x)\,dx$$

$$f\,g \qquad - \int f'g$$

(*) $$\Rightarrow \int \cos^2(x)\,dx = \cos(x)\,\mathrm{sen}(x) + \int \mathrm{sen}^2(x)\,dx \qquad \mathrm{sen}^2(x) = 1-\cos^2(x)$$

$$= \cos(x)\,\mathrm{sen}(x) + \int (1-\cos^2(x))\,dx$$

$$= \cos(x)\,\mathrm{sen}(x) + \int 1\,dx - \int \cos^2(x)\,dx$$

$$= \cos(x)\,\mathrm{sen}(x) + x + c - \int \cos^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \cos^2(x)\,dx = \cos(x)\,\mathrm{sen}(x) + x + c \qquad |:2$$

$$\Rightarrow \int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cos(x)\,\mathrm{sen}(x) + \frac{x}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Domanda: usare anche int. per parti per $\int \mathrm{sen}^2(x)\,dx$?

$$\int \mathrm{sen}^2(x)\,dx = \int \underset{f}{\mathrm{sen}(x)}\,\underset{g'}{\mathrm{sen}(x)}\,dx$$

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{sen}(x) \\ f'(x) = \cos(x) \\ g'(x) = \mathrm{sen}(x) \\ g(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

$$= \mathrm{sen}(x)(-\cos(x)) - \int \cos(x)(-\cos(x))\,dx$$

$$f\,g \qquad - \int f'g$$

$$= -\mathrm{sen}(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^2(x)\,dx = \underbrace{\cos(x)\,\mathrm{sen}(x) - \mathrm{sen}(x)\cos(x)}_{=0} + \int \cos^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^2(x)\,dx = \int \cos^2(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

Integrazione per parti per integrali definiti:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx}$$

$\longrightarrow$ Dimostrazione sull'Esercizio VII.

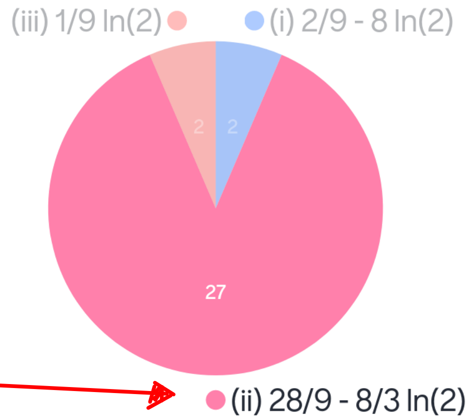
Menti:

Qual'è l'integrale seguente?

$$\int_1^2 x^2\,(1-\ln(x))\,\mathrm{d}x\ .$$

La soluzione è

(i) $\frac{2}{9} - 8\ln(2)$, (ii) $\frac{28}{9} - \frac{8}{3}\ln(2)$, (iii) $\frac{1}{9}\ln(2)$.



giusto

Soluzione del Menti:

$$\int_1^2 x^2(1-\ln(x))\,dx = \int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 x^2\ln(x)\,dx$$

$f(x)=\ln(x)$

$f'(x)=\frac{1}{x}$

$g'(x)=x^2$

$g(x)=\frac{1}{3}x^3$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\ln(x)}_{f}\ \underbrace{x^2}_{g'}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - \left(\left[\ln(x)\,\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\,\frac{1}{3}x^3\,dx\right)$$

$$f\,g \quad - \int f'g$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \left(\ln(2)\,\frac{8}{3} - 0 \quad - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx\right)$$

$$= \frac{7}{3} - \ln(2)\,\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$

$$= \frac{7}{3} - \ln(2)\,\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\underbrace{\left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right]}_{=7/3}$$

$$= \frac{7}{3} - \ln(2)\,\frac{8}{3} + \frac{7}{9}$$

$$= \frac{21}{9} + \frac{7}{9} - \ln(2)\,\frac{8}{3} = \frac{28}{9} - \ln(2)\,\frac{8}{3}.$$