Per richiamare i risultati di ieri:

(*) Teorema: (Criterio di monotonia)

Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora:

(1) $f'(x) \geq 0$ ~~per ogni~~ $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ è crescente in $[a,b]$

(2) $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ è decrescente in $[a,b]$.

(**) Teorema: (Caratt. funzioni costanti)

Sia f continua in $[a,b]$.

f è costante in $[a,b]$ se e solo se f è derivabile in (a,b) e la derivata è $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$.

Teorema nuovo:

$\boxed{\text{Teorema: (Criterio di stretta monotonia)}}$

Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora:

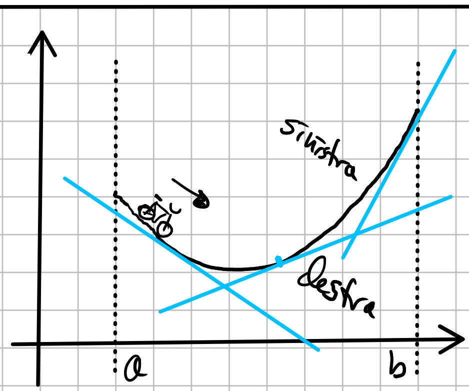
(1) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$ e f' non si annulla identicamente in alcun intervallo contenuto in (a,b). $\Leftrightarrow$ f è strettamente crescente in $[a,b]$

(2) $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b)$ e f' non si annulla identicamente in alcun intervallo contenuto in (a,b). $\Leftrightarrow$ f è strettamente decrescente in $[a,b]$.

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ Combinazione di (*) e (**). ∎

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $f(x) = x^3$ con dominio $\mathbb{R}$ è strettamente crescente. La derivata è $f'(x) = 3x^2$, e $f'(x)$ si annulla per $x = 0$ (e solo per $x = 0$).

Funzioni convesse e concave



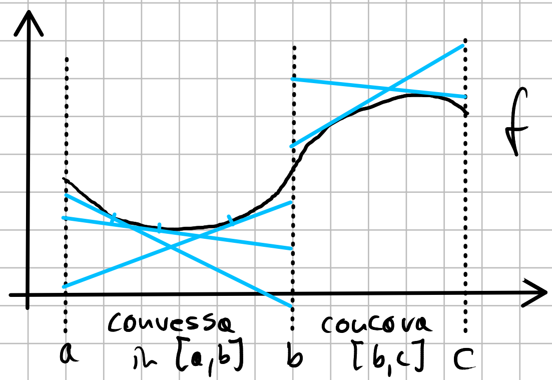
La funzione è al di sopra delle retta tangente in ogni punto.
"Una funzione convessa."

Definizione: Si dice:

f è <u>convessa</u> in $[a,b]$ se $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\forall x, x_0 \in [a,b]$

f è <u>concava</u> in $[a,b]$ se $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\forall x, x_0 \in [a,b]$.

Esempio:



Qui: $x = b$ si chiama un <u>punto di flesso</u>, cioè un punto dove cambia da convessa a concava oppure da concava a convessa.

Teorema (criterio di convessità):

Sia f continua in $[a,b]$ e due volte derivabile in (a,b).
Le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti:

(a) f è convessa in $[a,b]$

(b) f' è crescente in (a,b)

(c) $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

Un analogo criteri vale per concava / decrescente / $f'' \leq 0$.

Dimostrazione: (b) e (c) sono equivalenti per il criterio di monotonia.

"(a) $\Rightarrow$ (b)": Consideriamo $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$.

Per la definizione di convessità:

(1) $$f(x) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \qquad \forall x \in [a,b]$$

(2) e $$f(x) \ge f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) \qquad \forall x \in [a,b].$$

(1) vale in particolare anche per $x = x_2$:

(1') $$f(x_2) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

(2) vale anche per $x = x_1$:

(2') $$f(x_1) \ge f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

La somma di "(1') + (2')":

$$\cancel{f(x_2) + f(x_1)} \ge \cancel{f(x_1) + f(x_2)} + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

cancellare

$$0 \ge f'(x_1)(x_2 - x_1) - f'(x_2)(x_2 - x_1)$$

$$0 \ge \left(f'(x_1) - f'(x_2)\right)(x_2 - x_1) \qquad \Big| : (x_2 - x_1)$$

$x_2 - x_1 > 0$

$$0 \ge f'(x_1) - f'(x_2)$$

$$f'(x_2) \ge f'(x_1).$$

"(b) $\Rightarrow$ (a)": Fissiamo $x, x_0 \in [a,b]$ con $x > x_0$.

Per il teorema di Lagrange esiste $x_1 \in (x, x_0)$ tale che:

$$f'(x_1) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \Big| \cdot (x - x_0)$$

o equivalentemente: $f(x) - f(x_0) = \underline{f'(x_1)}(x - x_0)$.

Siccome $x_1 > x_0$ e f' crescente:

$$f'(x_1) \ge f'(x_0).$$

Allora: $$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Rimane il caso $x < x_0$, ma la dimostrazione funziona in modo analogo. ■

Esempi: $f(x) = e^x$ è convessa su $\mathbb{R}$ perché $f''(x) = e^x > 0$.

$g(x) = \ln(x)$ è concava per $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

MENTI

La funzione f(x) = x³ - 3x è
(su $\mathbb{R}$)

6
convessa per ogni x

2
concava per ogni x

1
convessa per x < 0, concava per x > 0

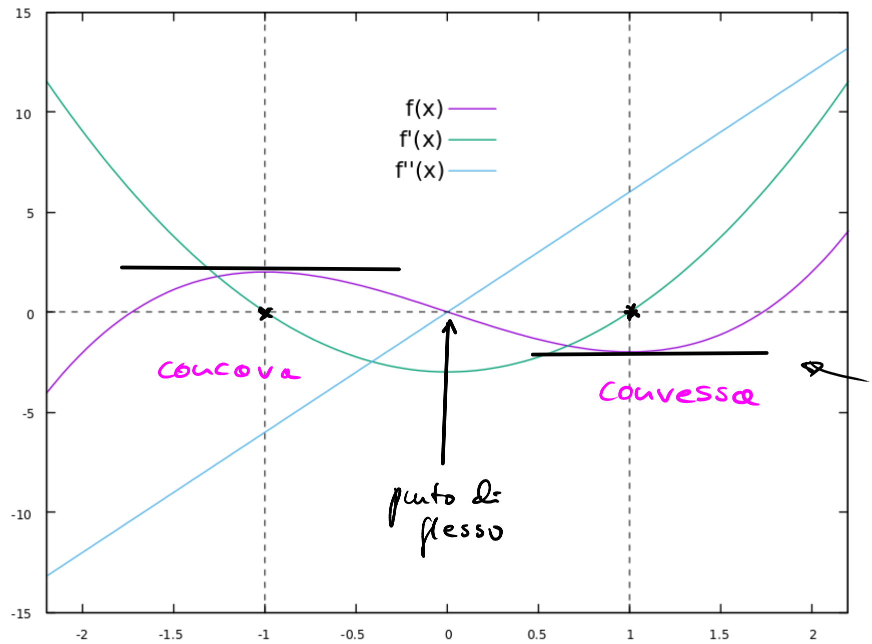
30
concava per x < 0, convessa per x > 0

Soluzione di Menti:

$f(x) = x^3 - 3x$: $\quad f'(x) = 3x^2 - 3 \qquad f''(x) = 6x$

$f''(x) > 0$ se $x > 0$: f è convessa per $x > 0$

$f''(x) < 0$ se $x < 0$: f è concava per $x < 0$.



retta tangente orizzontale in punti di massimo/minimo relativo

La funzione arctg(x) è

(su $\mathbb{R}$)

2
convessa per ogni x

2
concava per ogni x

20
convessa per x < 0,
concava per x > 0

8
concava per x < 0,
convessa per x > 0

Soluzione di Menti 2:

$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = g_1(g_2(x))$$

$$g_1(x) = \frac{1}{x} \qquad g_2(x) = 1 + x^2$$

$$g_1'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad g_2'(x) = 2x$$

$$f''(x) = g_1'(g_2(x))\, g_2'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2}\, 2x$$

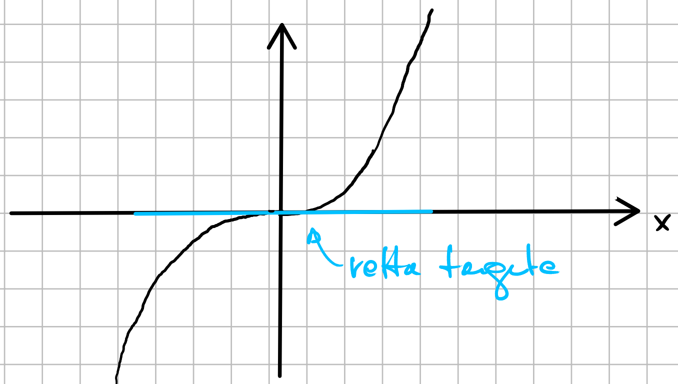
$f''(x) \geq 0$ per $x < 0 \Rightarrow f$ convessa se $x < 0$

$f''(x) \leq 0$ per $x > 0 \Rightarrow f$ concava se $x > 0$.

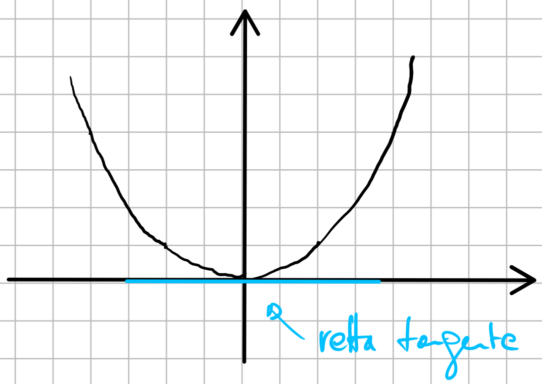
Fine del Menti

Un criterio per trovare minimi e massimi relativi

La funzione $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$, ma $x = 0$ ma x è né massimo né minimo relativo:



Invece: pensiamo di $f(x) = x^2$:



- Minimo relativo
- al di sopra della retta tangente
- f convessa
- $f''(0) > 0$.

$\boxed{\text{Teorema: (criterio minimo/massimo)}}$

Sia f continua in $[a,b]$ e due volte derivabile in (a,b). Sia $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0)=0$. Allora:

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di minimo relativo

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di massimo relativo.

(Per $f''(x_0)=0$ non possiamo decidere per ora.)

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ (Solo per il caso che f'' è una funzione continua)

Consideriamo il caso $f''(x_0) > 0$: Per il teorema della permanenza del segno $f''(x) > 0$ in un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 (con $\delta > 0$).

Quindi f è convessa in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

f è convessa significa:

$$f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0).$$

$f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Questo è la def. di essere minimo relativo. ∎

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$

$f'(0) = 0$

$x = 0$ è un min/massimo?

$f''(0) = 0$, non possiamo decidere così.

$\boxed{\text{Esempio:}}$ La funzione di problema 3, esercizio IV:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 1.25\, x^2 - 7x + \pi \quad \text{in } [-5, 3]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 7$$

estremi dell'intervallo

Candidati per minimi/massimi relativi: $x \in \{-5, 2, 3\}$.

$x = 2$ è nell'interno, si può usare il teorema per controllare: $f''(x) = x + \frac{5}{2}$

$$f''(2) = 2 + \frac{5}{2} > 0$$

$\Rightarrow$ $x = 2$ è un punto di minimo relativo.

Torniamo a calcolare limiti adesso:

Il teorema di L'Hôpital:

Per limiti di forma indeterminata, per esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} \quad : \text{ Indeterminato, tipo } \text{“}\frac{0}{0}\text{”}.$$

$\boxed{\text{Teorema di l'Hôpital (parte I):}}$ Siano f, g derivabili in un intorno di x_0, e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Se in un intorno di x_0 risulta $g(x) \neq 0 \ \forall x \neq x_0$ e $g'(x_0) \neq 0 \ \forall x \neq x_0$: allora si

forme indeterminate "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

se il secondo limite esiste.

Esempio: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen}(2x)}$: $f(x) = e^x - 1$ $\quad f'(x) = e^x$

$g(x) = \operatorname{sen}(2x)$.

Controlliamo l'ipotesi:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$ ok

$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(0) = 0.$ ok

$\operatorname{sen}(2x) \neq 0$ in un intorno di $x_0 = 0$, per $x \neq x_0$. ok

$g'(x) = 2\cos(2x) \neq 0$ in un intorno di $x_0 = 0$. ok

Allora:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen}(2x)} \overset{\text{Hôpital}}{\underset{H.}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2\cos(2x)} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Motivazione (per l'Hôpital): (invece di una dimostrazione)

Se le derivate sono continue e $g'(x_0) \neq 0$:

f, g derivabili $\Rightarrow$ f, g continue $\Rightarrow$ $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

$g(x_0) = 0$.

Allora: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)}{\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)} = \frac{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to x_0} f'(x)}{\lim_{x \to x_0} g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema di l'Hôpital (parte II): Il teorema vale anche per forme indeterminate del tipo "$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$".

Esempi:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\log(x)}$: $x^2-1 \longrightarrow 0$, $\log(x) \longrightarrow 0$ $\Rightarrow$ forma indeterminata di tipo "$\dfrac{0}{0}$".

$$\overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to 1} 2x^2 = 2.$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^b}{e^x}$ con $b>0$: tipo "$\dfrac{+\infty}{+\infty}$".

non solo per $b\in\mathbb{N}$, anche $b\in\mathbb{R}$

$$\overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{b\,x^{b-1}}{e^x}$$

se $b>1$: ancora tipo "$\dfrac{+\infty}{+\infty}$"

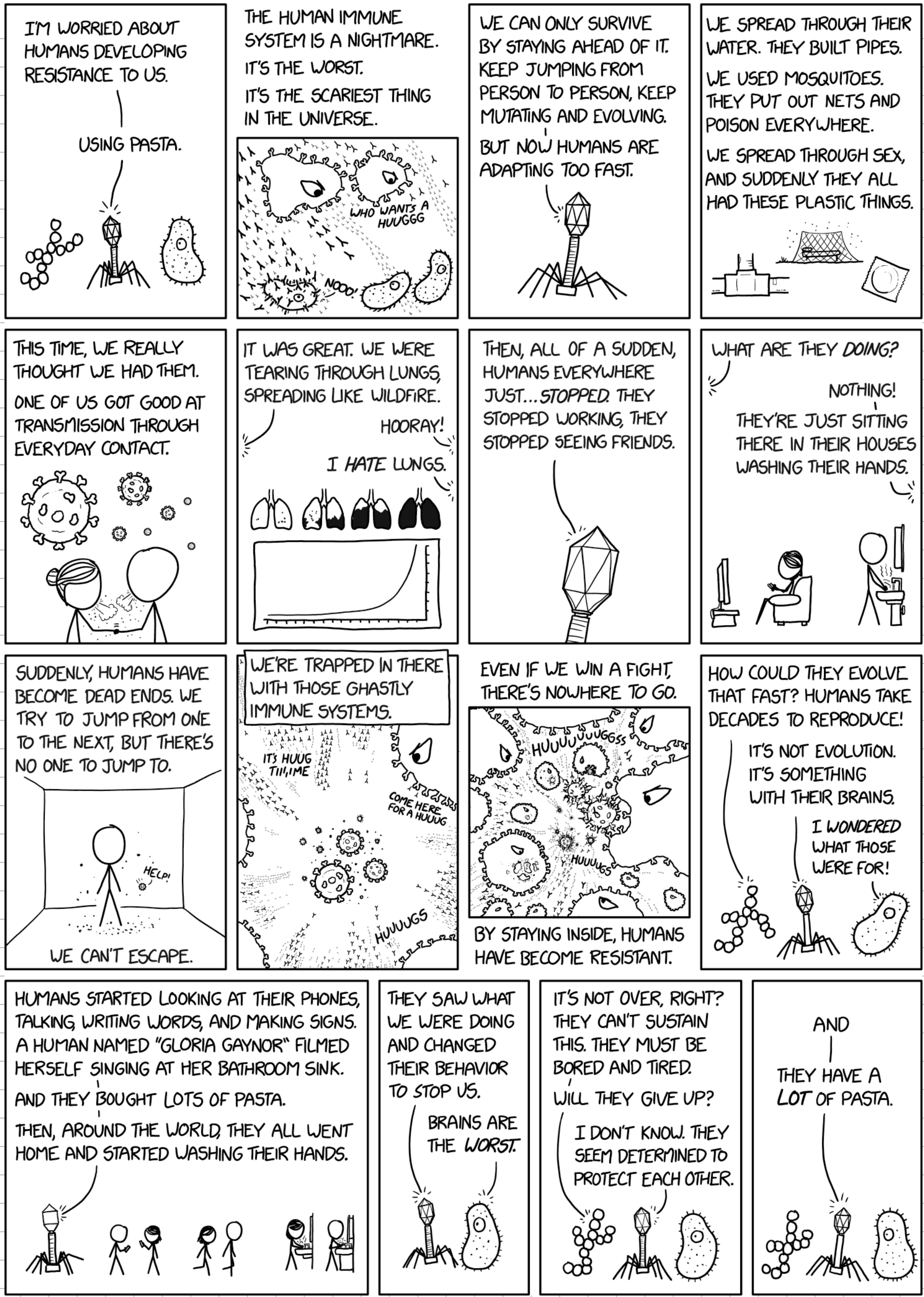
$$\overset{\text{Hôpital, n volte } (n\in\mathbb{N})}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{b(b-1)(b-2)\cdots(b-n+1)\,x^{b-n}}{e^x}$$

Se arriviamo a $b-n<0 \iff n>b$:

diventa tipo "$\dfrac{0}{+\infty}$", allora definito: $=0$.

Usiamo: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^a = 0$ con $a<0$

per esempio: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{-2.39} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{2.39}} = 0.$



Buona Pasqua e
buone vacanze!