

Per richiamare i risultati di ieri:

(*) Teorema: (Criterio di monotonia)

Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora:

(1) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ è crescente in $[a, b]$

(2) $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ è decrescente in $[a, b]$.

(**) Teorema: (Caratt. funzioni costanti)

Sia f continua in $[a, b]$,

f è costante in $[a, b]$ se e solo se f è derivabile in (a, b)

e la derivata è $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Teorema nuovo:

Teorema: (Criterio di stretta monotonia)

Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora:

(1) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

e f' non si annulla identicamente

in alcun intervallo contenuto in (a, b) .

$\Leftrightarrow f$ è strettamente crescente in $[a, b]$

(2) $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

e f' non si annulla identicamente

in alcun intervallo contenuto in (a, b) .

$\Leftrightarrow f$ è strettamente decrescente in $[a, b]$

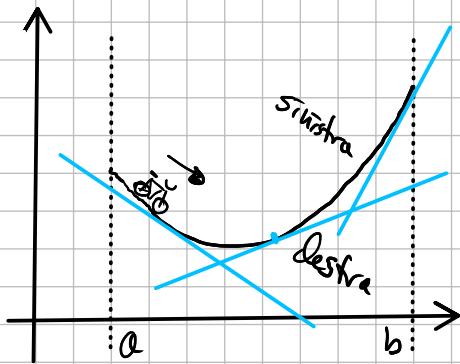
Dimostrazione: Combinazione di (*) e (**). ■

Esempio:

$f(x) = x^3$ con dominio \mathbb{R} è strettamente crescente. La derivata è $f'(x) = 3x^2$, e $f'(x)$ si annulla per $x=0$ (e solo per $x=0$).

Funzioni convesse e concave

2

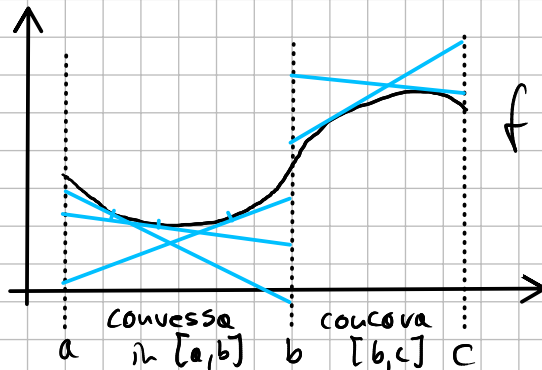


La funzione è al di sopra della retta tangente in ogni punto.
"Una funzione convessa."

Definizione: Si dice:

f è convessa in $[a, b]$ se $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in [a, b]$
 f è concava in $[a, b]$ se $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in [a, b]$.

Esempio:



Qui: $x = b$ si chiama un punto di flesso, cioè un punto dove cambia da convessa a concava oppure da concava a convessa.

Teorema (criterio di convessità):

Sia f continua in $[a, b]$ e due volte derivabile in (a, b) .

Le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti:

- f è convessa in $[a, b]$
- f' è crescente in (a, b)
- $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Un analogo criterio vale per concava / decrescente / $f'' \leq 0$.

Dimostrazione: (b) e (c) sono equivalenti per il criterio di monotonia.

"(a) => (b)": Consideriamo $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$.

Per la definizione di convessità:

(1) $f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$

(2) e $f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) \quad \forall x \in [a, b]$.

(1) vale in particolare anche per $x = x_2$:

(1') $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

(2) vale anche per $x = x_1$:

(2') $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$.

La somma di "(1') + (2)'" :

~~$f(x_2) + f(x_1) \geq f(x_1) + f(x_2) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$~~
cancellare

$0 \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) - f'(x_2)(x_2 - x_1)$

$0 \geq (f'(x_1) - f'(x_2))(x_2 - x_1) \quad | : (x_2 - x_1)$

$x_2 - x_1 > 0$

$0 \geq f'(x_1) - f'(x_2)$

$f'(x_2) \geq f'(x_1)$.

"(b) => (a)": Fissiamo $x, x_0 \in [a, b]$ con $x > x_0$.

Per il teorema di Lagrange esiste $x_1 \in (x_0, x)$ tale che:

$f'(x_1) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad | \cdot (x - x_0)$

o equivalentemente: $f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0)$.

Siccome $x_1 > x_0$ e f' cresce:

$f'(x_1) \geq f'(x_0)$.

Allora: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Rimane il caso $x < x_0$, ma la dimostrazione funziona in modo analogo.

Esempi:

$f(x) = e^x$ è convessa su \mathbb{R} perché $f''(x) = e^x > 0$.

$g(x) = \ln(x)$ è concava per $x > 0$:

$g'(x) = \frac{1}{x}$, $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

MENTI

La funzione $f(x) = x^3 - 3x$ è (su \mathbb{R})



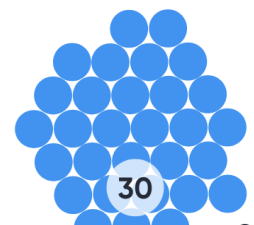
convessa per ogni x



concava per ogni x



convessa per $x < 0$, concava per $x > 0$



concava per $x < 0$, convessa per $x > 0$

Soluzione di Merid:

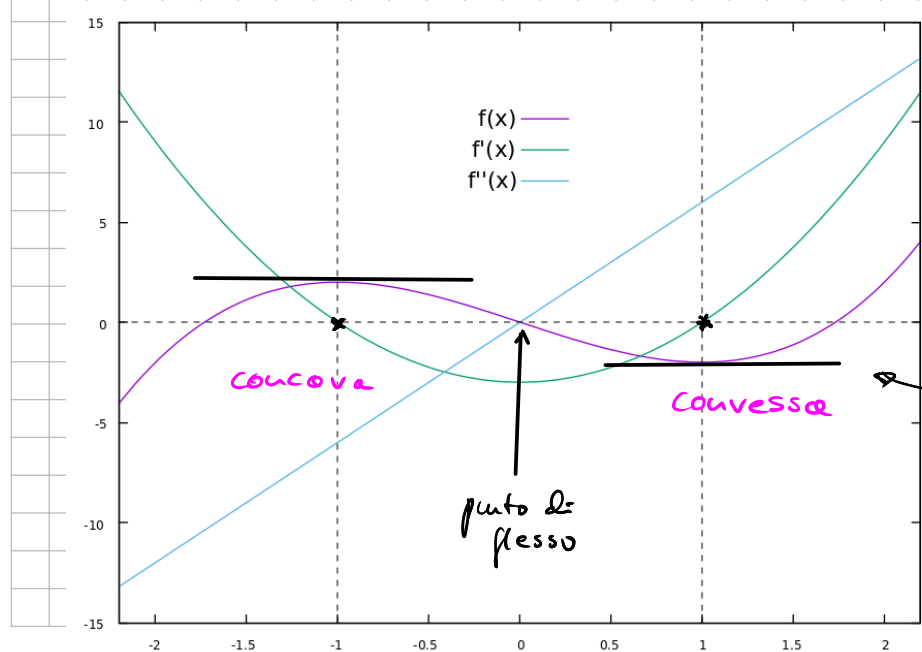
$f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

$f''(x) > 0$ se $x > 0$: f è convessa per $x > 0$

$f''(x) < 0$ se $x < 0$: f è concava per $x < 0$.



retta tangente orizzontale in punti di massimo/minimo relativo

La funzione $\text{arctg}(x)$ è (su \mathbb{R})



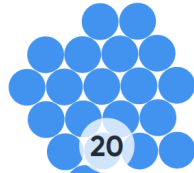
2

convessa per ogni
 x



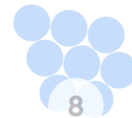
2

concava per ogni x



20

convessa per $x < 0$,
concava per $x > 0$



8

concava per $x < 0$,
convessa per $x > 0$

Soluzione di Meiri 2:

$$f(x) = \underline{\text{arctg}(x)}: \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = g_1(g_2(x))$$

$$g_1(x) = \frac{1}{x} \quad g_2(x) = 1+x^2$$

$$g_1'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad g_2'(x) = 2x$$

$$f''(x) = g_1'(g_2(x)) g_2'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2} 2x$$

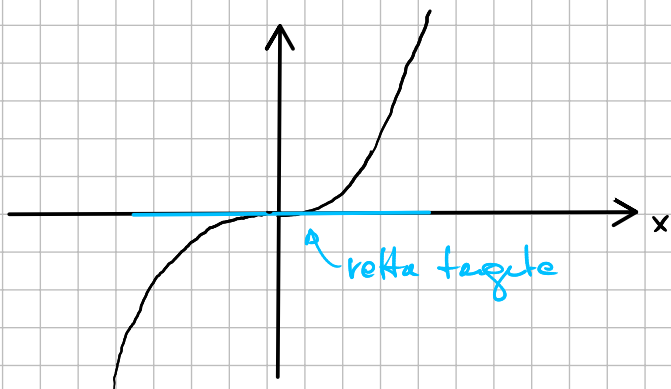
$$f''(x) \geq 0 \text{ per } x < 0 \Rightarrow f \text{ convessa se } x < 0$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ per } x > 0 \Rightarrow f \text{ concava se } x > 0.$$

———— Fine del Meiri ————

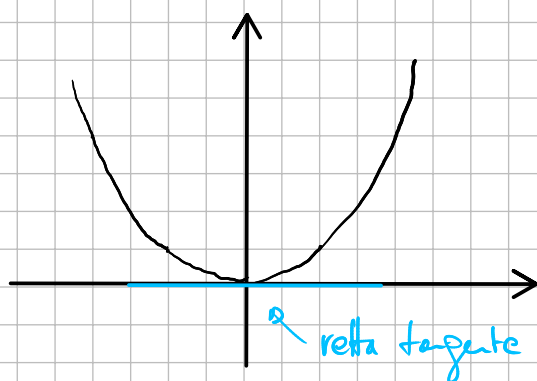
Un criterio per trovare minimi e massimi relativi

La funzione $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$, ma $x=0$ non è ne massimo ne minimo relativo:



Invece: pensiamo di $f(x) = x^2$:

- Minimo relativo
- al di sopra della retta tangente
- f convessa
- $f''(0) > 0$.



Teorema: (criterio minimo/massimo)

Sia f continua in $[a,b]$ e due volte derivabile in (a,b) .

Sia $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) = 0$ Allora:

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di minimo relativo

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di massimo relativo.

(Per $f''(x_0) = 0$ non possiamo decidere per ora.)

Dimostrazione: (Solo per il caso che f'' è una funzione continua.)

Consideriamo il caso $f''(x_0) > 0$: Per il teorema della permanenza del segno $f''(x) > 0$ in un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 (con $\delta > 0$).

Quindi f è convessa in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

f è convessa significa:

$$f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0).$$

$f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Questo è la def. di essere minimo relativo. ■

Esempio:

$$f(x) = x^3: f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$$

$$f'(0) = 0$$

$x = 0$ è un min/massimo?

$f''(0) = 0$, non possiamo decidere così.

Esempio:

La funzione di problema 3, esercizio IV:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 1.25x^2 - 7x + \pi \quad \text{in } [-5, 3]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 7$$

estremi dell'intervallo

Candidati per minimi/massimi relativi: $x \in \{-5, 2, 3\}$.

$x = 2$ è nell'intervallo, si può usare il teorema per controllare:

$$f''(x) = x + \frac{5}{2}$$

$$f''(2) = 2 + \frac{5}{2} > 0$$

$\Rightarrow x = 2$ è un punto di minimo relativo.

Torniamo a calcolare limiti adesso:

Il teorema di L'Hôpital:

Per limiti di forma indeterminata, per esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sec(2x)} : \text{indeterminato, tipo } \frac{0}{0}.$$

Teorema di L'Hôpital (parte I):

Siano f, g

derivabili in un intorno di x_0 , e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Se in un intorno di x_0 risulta $g(x) \neq 0 \forall x \neq x_0$

e $g'(x_0) \neq 0$ $\forall x \neq x_0$: allora si:

forma
indeterminata
"0/0"

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

se il secondo limite esiste.

Esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} : \begin{matrix} f(x) = e^x - 1 & f'(x) = e^x \\ g(x) = \sin(2x) \end{matrix}$$

Controlliamo l'ipotesi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0. \quad \text{ok}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) = \sin(0) = 0. \quad \text{ok}$$

$$\sin(2x) \neq 0 \text{ in un intorno di } x_0 = 0, \text{ per } x \neq x_0. \quad \text{ok}$$

$$g'(x) = 2\cos(2x) \neq 0 \text{ in un intorno di } x_0 = 0. \quad \text{ok}$$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} \stackrel{\text{H\u00f4pital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2\cos(2x)} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Motivazione (per l'H\u00f4pital): *(invece di una dimostrazione)*

Se le derivate sono continue e $g'(x_0) \neq 0$:

$$f, g \text{ derivabili} \Rightarrow f, g \text{ continue} \Rightarrow \begin{matrix} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \\ g(x_0) = 0. \end{matrix}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}{\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Teorema di l'Hôpital (parte II):

Il teorema vale

anche per forme indeterminate del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Esempi:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\log(x)}$: $x^2 - 1 \rightarrow 0$ \Rightarrow forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$.

L'Hôpital $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 = 2.$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{e^x}$ con $b > 0$: tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Hôpital $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx^{b-1}}{e^x}$ se $b > 1$: ancora tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$

Hôpital, u volte (u ∈ N) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b(b-1)(b-2)\dots(b-u+1)x^{b-u}}{e^x}$

Se arriviamo a $b-u < 0 \Leftrightarrow u > b$:

diventa tipo $\frac{0}{+\infty}$, allora definito: $= 0.$

non solo per $b \in \mathbb{N}$,
ma anche per $b \in \mathbb{R}$

Usiamo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0$ con $a < 0$

per esempio: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-2.33} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2.33}} = 0.$

I'M WORRIED ABOUT HUMANS DEVELOPING RESISTANCE TO US.

USING PASTA.

THE HUMAN IMMUNE SYSTEM IS A NIGHTMARE. IT'S THE WORST. IT'S THE SCARIEST THING IN THE UNIVERSE.

WE CAN ONLY SURVIVE BY STAYING AHEAD OF IT. KEEP JUMPING FROM PERSON TO PERSON, KEEP MUTATING AND EVOLVING. BUT NOW HUMANS ARE ADAPTING TOO FAST.

WE SPREAD THROUGH THEIR WATER. THEY BUILT PIPES. WE USED MOSQUITOES. THEY PUT OUT NETS AND POISON EVERYWHERE. WE SPREAD THROUGH SEX, AND SUDDENLY THEY ALL HAD THESE PLASTIC THINGS.

THIS TIME, WE REALLY THOUGHT WE HAD THEM. ONE OF US GOT GOOD AT TRANSMISSION THROUGH EVERYDAY CONTACT.

IT WAS GREAT. WE WERE TEARING THROUGH LUNGS, SPREADING LIKE WILDFIRE. HOORAY! I HATE LUNGS.

THEN, ALL OF A SUDDEN, HUMANS EVERYWHERE JUST... STOPPED. THEY STOPPED WORKING, THEY STOPPED SEEING FRIENDS.

WHAT ARE THEY DOING? NOTHING! THEY'RE JUST SITTING THERE IN THEIR HOUSES WASHING THEIR HANDS.

SUDDENLY, HUMANS HAVE BECOME DEAD ENDS. WE TRY TO JUMP FROM ONE TO THE NEXT, BUT THERE'S NO ONE TO JUMP TO.

WE CAN'T ESCAPE.

WE'RE TRAPPED IN THERE WITH THOSE GHASTLY IMMUNE SYSTEMS.

IT'S HUUG TIME

COME HERE FOR A HUUG

HUUGGS

EVEN IF WE WIN A FIGHT, THERE'S NOWHERE TO GO.

BY STAYING INSIDE, HUMANS HAVE BECOME RESISTANT.

HOW COULD THEY EVOLVE THAT FAST? HUMANS TAKE DECADES TO REPRODUCE!

IT'S NOT EVOLUTION. IT'S SOMETHING WITH THEIR BRAINS. I WONDERED WHAT THOSE WERE FOR!

HUMANS STARTED LOOKING AT THEIR PHONES, TALKING, WRITING WORDS, AND MAKING SIGNS. A HUMAN NAMED "GLORIA GAYNOR" FILMED HERSELF SINGING AT HER BATHROOM SINK. AND THEY BOUGHT LOTS OF PASTA. THEN, AROUND THE WORLD, THEY ALL WENT HOME AND STARTED WASHING THEIR HANDS.

THEY SAW WHAT WE WERE DOING AND CHANGED THEIR BEHAVIOR TO STOP US. BRAINS ARE THE WORST.

IT'S NOT OVER, RIGHT? THEY CAN'T SUSTAIN THIS. THEY MUST BE BORED AND TIRED. WILL THEY GIVE UP? I DON'T KNOW. THEY SEEM DETERMINED TO PROTECT EACH OTHER.

AND THEY HAVE A LOT OF PASTA.

Buona Pasqua e buone vacanze!