# Soluzione Esercizio IV

**Problema 1:** $\boxed{a}$ Derivata di $\log_a(x)$:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

In generale: Se $c$ è un numero fisso $D(cf) = c\,Df$.

- $D(cf)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
  $= c\,Df(x)$
- $D(cf) = \underbrace{(Dc)}_{=0} f + c\,Df = c\,Df.$

$$\Rightarrow D\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} D\ln(x) = \frac{1}{\ln(a)\,x}.$$

$\boxed{b}$ $\underline{f(x) = \ln(\operatorname{sen}(x^2))} = f_1(f_2(f_3(x)))$

con
$$f_1(x) = \ln(x) \qquad f_1'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f_2(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad f_2'(x) = \cos(x)$$
$$f_3(x) = x^2 \qquad f_3'(x) = 2x$$

$$f'(x) = f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot D(f_2(f_3(x)))$$
$$= f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_3'(x)$$
$$= \frac{1}{\operatorname{sen}(x^2)} \cdot \cos(x^2)\, 2x = \frac{\cos(x^2)\,2x}{\operatorname{sen}(x^2)}.$$

quoziente

$$f''(x) = \frac{D(\cos(x^2)\,2x)\,\operatorname{sen}(x^2) - \cos(x^2)\,2x\,D(\operatorname{sen}(x^2))}{(\operatorname{sen}(x^2))^2}$$

prodotto composta

$$= \frac{\underline{D(\cos(x^2))\cdot 2x}\,\operatorname{sen}(x^2) + \underline{\cos(x^2)\,2}\,\operatorname{sen}(x^2) - \cos(x^2)\,2x\,\underline{\cos(x^2)\cdot 2x}}{\operatorname{sen}^2(x^2)}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\cdot 2x\,\operatorname{sen}(x^2) + \cos(x^2)\,2\operatorname{sen}(x^2) - \cos^2(x^2)\,4x^2}{\operatorname{sen}^2(x^2)}$$

$\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$

$$= \underbrace{\frac{-4x^2 + 2\cos(x^2)\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{sen}^2(x^2)}}_{\text{risultato ottimo}} = \frac{-4x^2 + \operatorname{sen}(2x^2)}{\operatorname{sen}^2(x^2)}$$

$g(x) = e^{-x^2} = g_1(g_2(x))$ $\quad g_1(x) = e^x \quad g_1'(x) = e^x$

$g_2(x) = -x^2 \quad g_2'(x) = -2x.$

funzione composta:

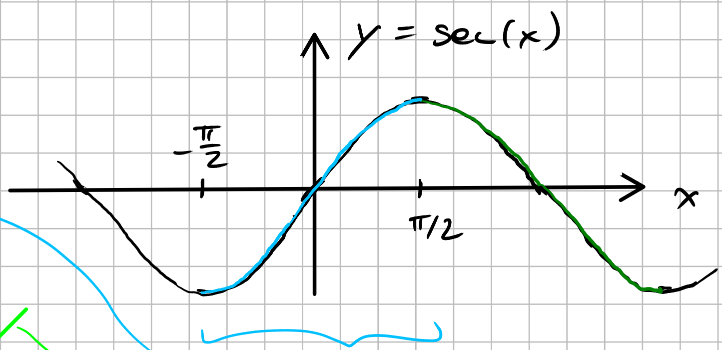
$$Dg(x) = (Dg_1)(g_2(x))\, Dg_2(x) = e^{-x^2}(-2x).$$

$$D^2 g(x) \overset{\text{prodotto}}{=} D(e^{-x^2}(-2x)) = (De^{-x^2})(-2x) + e^{-x^2} D(-2x)$$
$$= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2)$$
$$= e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

$h(x) = x \ln(x)$ regola per il prodotto

$$Dh(x) = D(x)\ln(x) + x\, D\ln(x)$$
$$= \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$
$$D^2 h(x) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

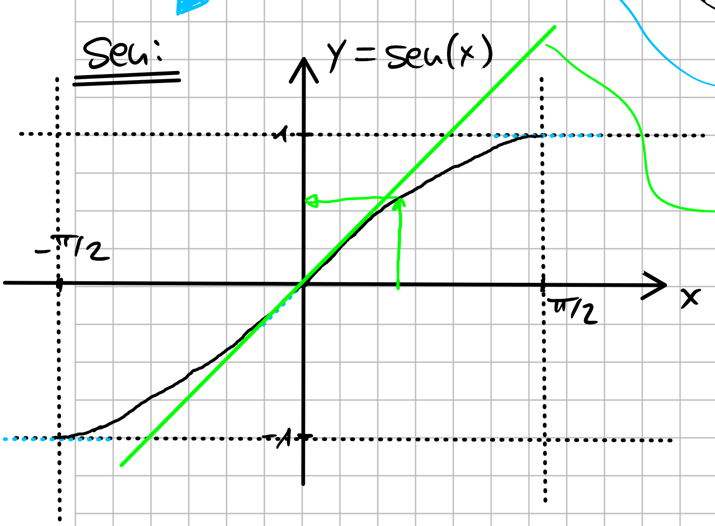
$\boxed{\text{Problema 2:}}$



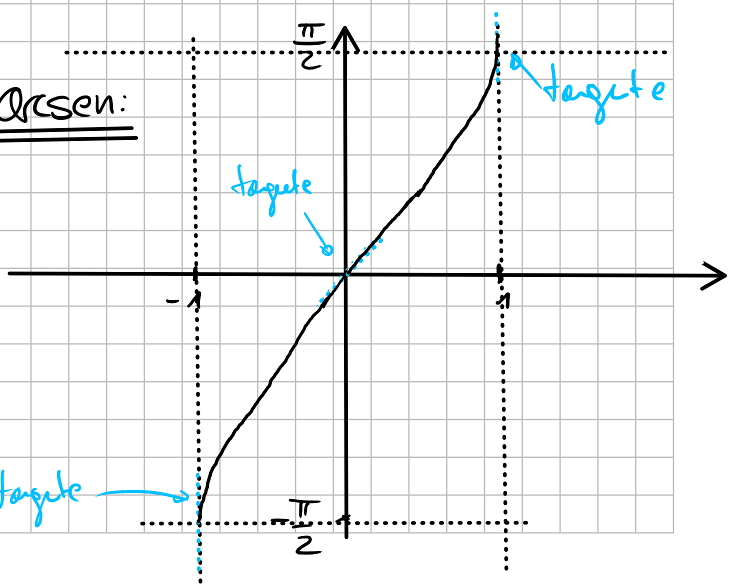

qui è monotona

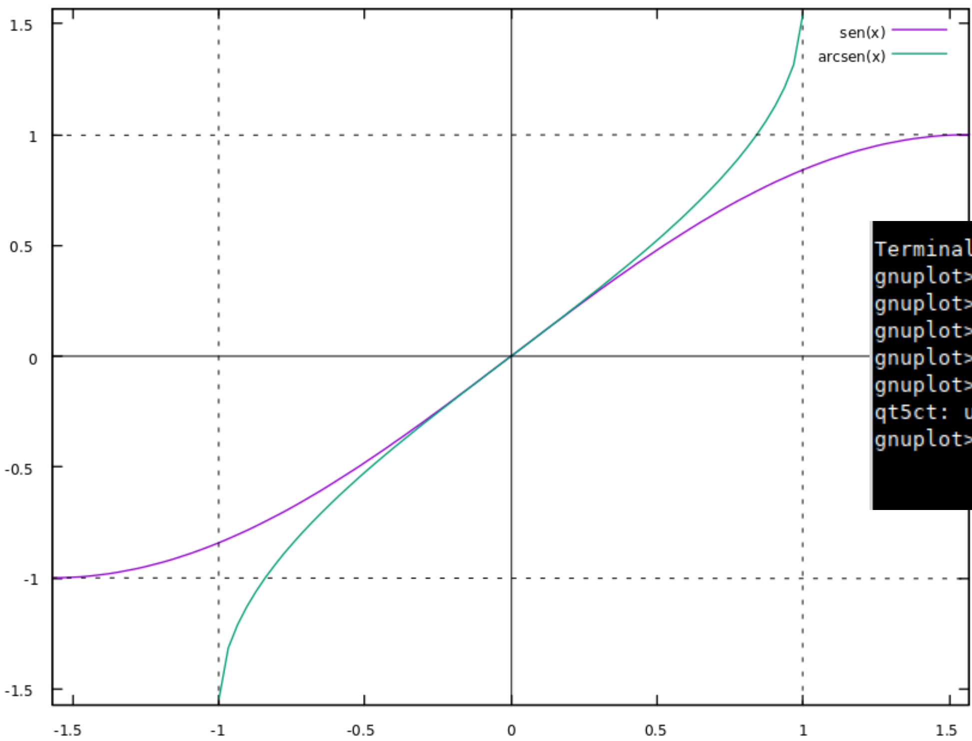
funzione inversa: riflessione alla retta con pendenza = 1.

**Sen:**




**arcsen:**






```
Terminal type is now 'qt'
gnuplot> set xrange [-pi/2:pi/2]
gnuplot> set yrange [-pi/2:pi/2]
gnuplot> f(x) = sin(x)
gnuplot> g(x) = x > -1 && x < 1 ? asin(x) : 1/0
gnuplot> plot f(x), g(x)
qt5ct: using qt5ct plugin
gnuplot> 
```

$\boxed{b}$ $\quad y = \text{sen}(x) = f(x) \qquad x = \text{arcsen}(y) = f^{-1}(y)$

$$D\,\text{arcsen}(y) = \frac{1}{D\,\text{sen}(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(y))}$$

ci ricordiamo $\cos^2 + \text{sen}^2 = 1 \Rightarrow \cos = \sqrt{1-\text{sen}^2}$

$$D\,\text{arcsen}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\text{sen}(\text{arcsen}(y)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

In modo analogo:

$$D\,\text{arccos}(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D\,\text{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\boxed{\text{Problema 3:}}$ $\quad f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 1.25\,x^2 - 7x + \pi$

nell'intervallo $[-5, 3]$.

Sempre: estremi dell'intervallo sono candidati: $x=-5$ e $x=3$.

Oltre: candidati nell'interno $(-5,3)$?

Nell'interno possiamo usare il teorema di Fermat.

La derivata è:

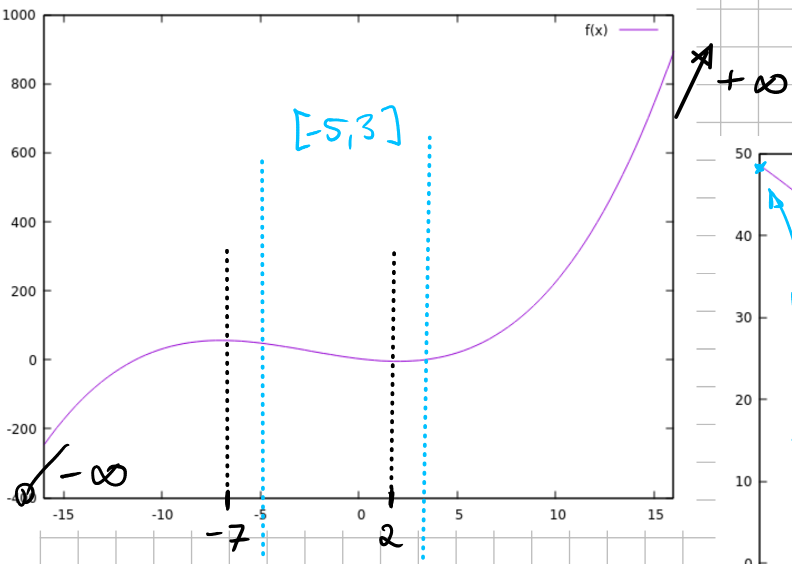
$$f'(x) = \frac{1}{6} 3x^2 + 2.5x - 7$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 7 = \frac{1}{2}(x^2+5x-14).$$

Dov'è $x^2+5x-14=0$ ?

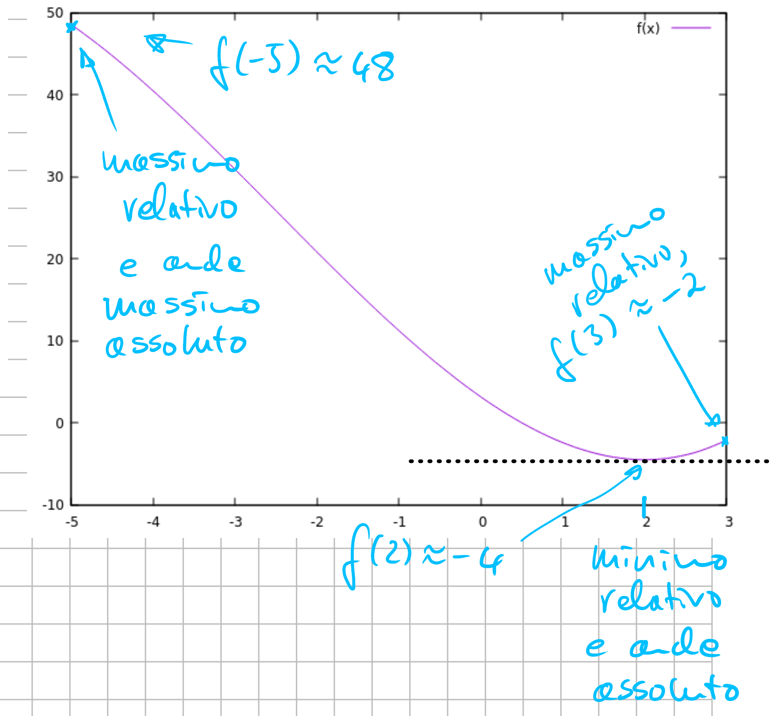
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot(-14)}}{2} = \begin{cases} -7 \\ 2 \end{cases}$$

$-7 \notin [-5,3]$, allora non è un candidato.

$\Rightarrow$ **Candidati:** $\{-5, 2, 3\}$.




solo $[-5,3]$




$\boxed{\text{Problema 4:}}$ soluzione nel libro, pagina 128.

LEZIONE

**Teorema di Rolle:** Sia $f$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$. Se $f(a)=f(b)$, esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ per cui $f'(x_0)=0$.

**Dimostrazione:** In base al teorema di Weierstrass esistono punti di minimo e massimo assoluto: $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$.

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \quad \forall x \in [a,b].$$

Se almeno uno dei due punti è nell'interno di $[a,b]$ ( $x_0 = x_{min}$ oppure $x_0 = x_{max}$ ): Teorema di Fermat implica: $f'(x_0) = 0$.

Se $x_{min}$ e $x_{max}$ sono punti di estremo:

Se $x_{min} = a$ e $x_{max} = b$:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b].$$

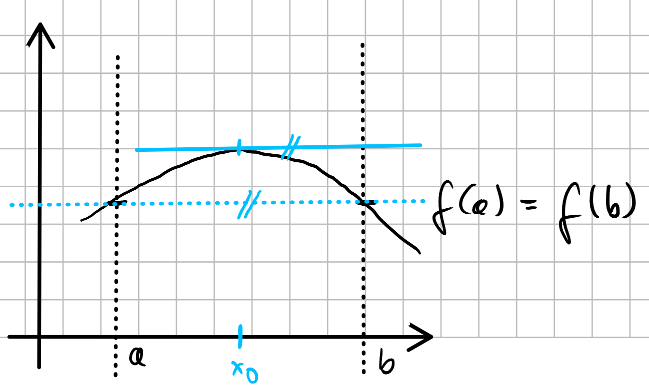
Ma per ipotesi: $f(a) = f(b)$.

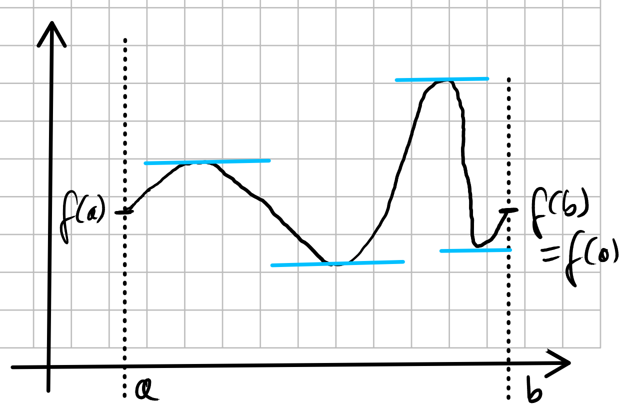
allora la funzione è costante:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in [a,b] \iff f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a,b].$$

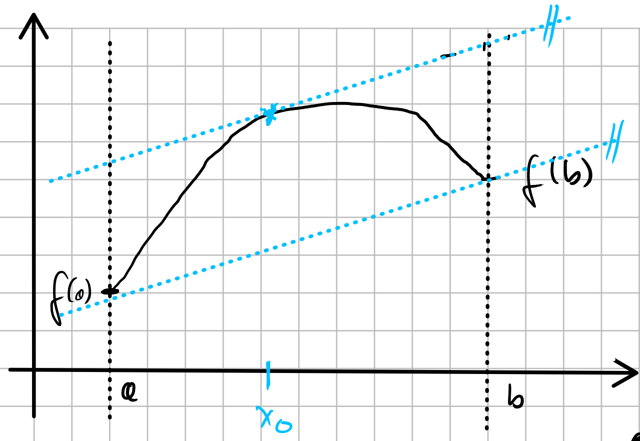
Ma la funzione costante ha $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$. ∎

Cosa significa il teorema di Rolle?



## Generalizzazione:




Esiste un punto $x_0$ dove la retta tangente è parallela a la retta da $f(a)$ a $f(b)$?

Sì!

**Teorema di Lagrange:** Sia $f$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$. Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che:

$$\underbrace{f'(x_0)}_{\text{una retta tangente}} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{pendenza della retta da } f(a) \text{ a } f(b)}$$

**Dimostrazione:**

Poniamo
$$g(x) := f(x) - \underbrace{\left( f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right)}_{\text{abbiamo sottratto la retta da } f(a) \text{ a } f(b).}$$

Si verifica: $g(a) = g(b) = 0$.

Il teorema di Rolle implica: $\exists\, x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = 0$.

La derivata è:
$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \blacksquare$$

⚠ Attenzione: Continuità in $x=a$ e $x=b$ è indispensabile!

La funzione
$$f(x) := \begin{cases} x & \text{per } x \in [0,1) \\ 0 & \text{per } x = 1 \end{cases}$$
non soddisfa l'ipotesi.

Teorema di Rolle / Lagrange non applicabile!

Infatti: $f(0) = f(1)$, ma $f'(x) = 1$ per ogni $x \in (0,1)$.

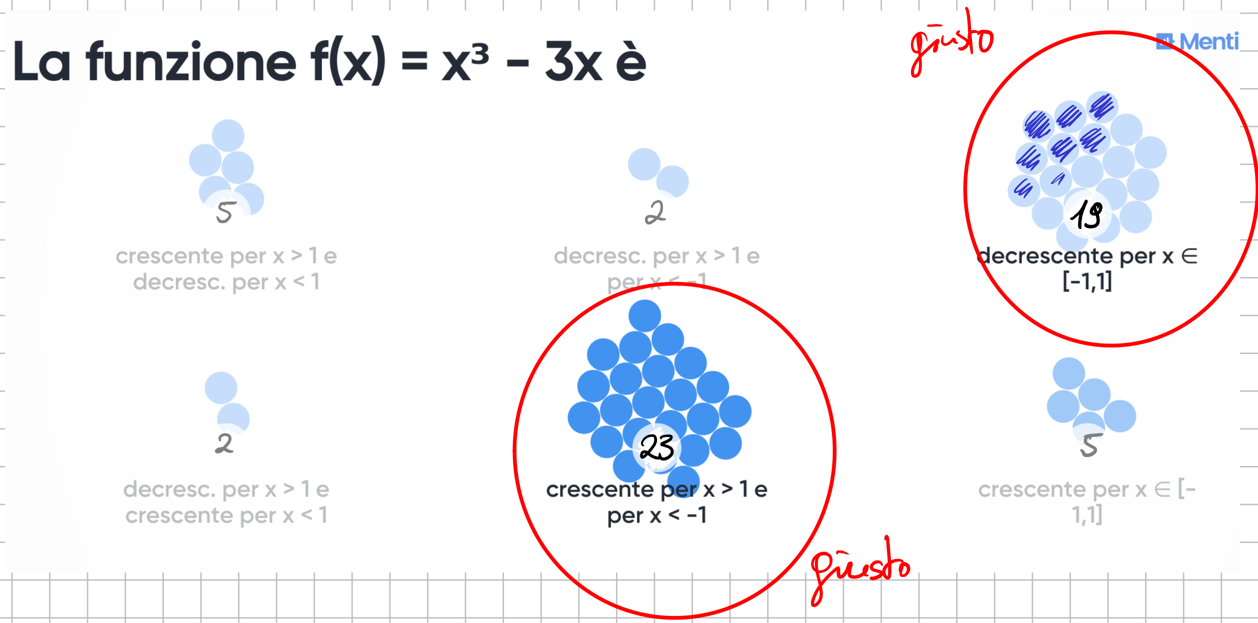
## Teorema (Criterio di monotonia):

Sia $f$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$. Allora:

(1) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b) \iff f$ è crescente in $[a,b]$

(2) $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b) \iff f$ è decrescente in $[a,b]$.

MENTI

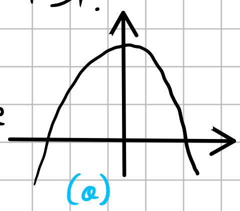



Soluzione Menti: $f(x) = x^3 - 3x$, dominio $\mathbb{R}$.

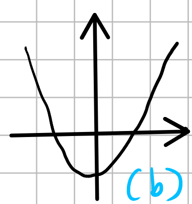
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$ per $x = -1$, e $x = +1$.

$f'$ è di secondo grado: $f'$ è come




o




Qual'è il tipo giusto?

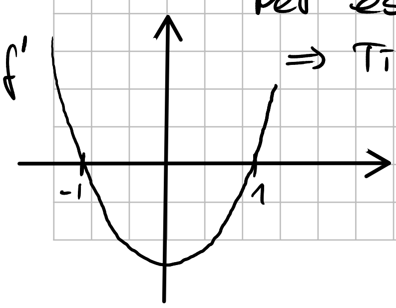
Sufficiente controllare se $f'(x_0) > 0$ o $f(x_0) < 0$ per un singolo, qualsiasi punto $x_0 > +1$.

Per esempio: $f'(2) = 3(4-1) = 9 > 0$.

$\Rightarrow$ Tipo (b) è giusto.

la derivata!

$f'$

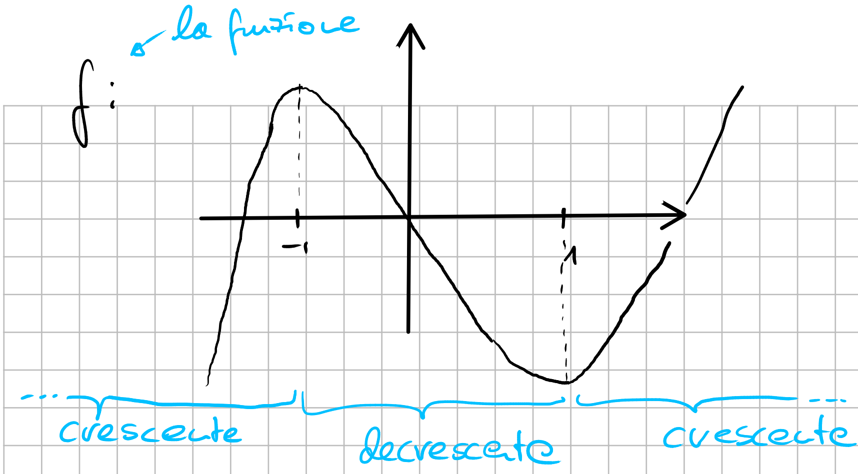



$\Longrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ per $x \in [-1,1]$

$f'(x) \geq 0$ per $x \leq -1$ e per $x \geq +1$.

8

$f$: la funzione




$\boxed{\text{Dimostrazione: (del criterio di monotonia)}}$ Solo per (1).

"$\Leftarrow$" Se $f$ è crescente, per ogni $x \in (a,b)$ e $h>0$ abbiamo: $f(x+h) \geq f(x)$.

Quindi
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

Allora
$$f'(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Il limite esiste, allora in particolare $\lim_{h\to 0}(\dots) = \lim_{h \to 0+}(\dots)$

"$\Rightarrow$" Supponiamo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

Dobbiamo dimostrare:

se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Usando il teorema di Lagrange possiamo scrivere:
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)\,(x_2 - x_1)$$
per un $x_0 \in [x_1, x_2] \subset [a,b]$.

Ma $f'(x_0) \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0$,

quindi $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. ∎

$\boxed{\text{Teorema: (Caratterizzazione delle funzioni costanti)}}$

Sia $f$ continua in $[a,b]$.

$f$ è costante in $[a,b]$ se e solo se $f$ è derivabile in $(a,b)$ e la derivata è $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

**Dimostrazione:** "$\Rightarrow$" Se $f$ è costante:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

"$\Leftarrow$": Se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$:

Il teorema precedente implica: $f$ è crescente.

" " " " $f$ è decrescente.

L'unica possibilità: $f$ è costante. $\blacksquare$