Derivate delle funzioni elementari

Già visto: $Dx^2 = 2x$, $Dx = 1$, $D\,\mathrm{sen}(x) = \cos(x)$,

$D\cos(x) = -\mathrm{sen}(x)$.

In generale: $Dx^n = n x^{n-1}$ per $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ Usiamo induzione.

$n=1$: Abbiamo già verificato: $Dx = 1$. (*)

Supponiamo che $Dx^n = n x^{n-1}$. (**)

Da n a $n+1$: Dobbiamo dimostrare: $Dx^{n+1} = (n+1)x^n$.

Per la regola del prodotto:

qui usiamo (**) — qui usiamo (*)

$$Dx^{n+1} = D(x^n x) = (Dx^n)\,x + x^n (Dx)$$

$$= (n x^{n-1})\,x + x^n 1 = (n+1)x^n. \quad \blacksquare$$

Domanda: Qual'è la derivata di $\mathrm{sen}^2(x)$?

$$D\,\mathrm{sen}^2(x) = D(\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(x)) = (D\,\mathrm{sen}(x))\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x)\,(D\,\mathrm{sen}(x))$$

regola per il prodotto

$$= 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x).$$

$$D\,\mathrm{sen}^2(x) = D f(g(x)) = (Df)(g(x))\,\underline{Dg(x)}$$

con $f(x) = x^2$, $g(x) = \mathrm{sen}(x)$

regola per la funzione composta

$f'(x) = 2x$

non dimenticare!

$$= 2\,\mathrm{sen}(x) \cdot \underline{\cos(x)}$$

$D\ln(x) = \frac{1}{x}$ (logaritmo con base e = logaritmo naturale):

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \ln\left(\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)$$

continuità del logaritmo

$$= \ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}\underbrace{\ln(e)}_{=1} = \frac{1}{x}. \quad \blacksquare$$

limite notevole

La derivata più importante in tutta la matematica:

$$De^x = e^x.$$

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ $f(x) = e^x$ è la funzione inversa del ln.
Allora con $y = \ln(x) \iff x = e^y$:

$$De^y \underset{\substack{\text{regola per la}\\ \text{funzione inversa}}}{=} \frac{1}{D\ln(x)} = \frac{1}{1/x} = x = e^y. \quad \blacksquare$$

$$Da^x = a^x \ln(a), \quad \text{per } a > 0:$$

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$

$$Da^x = De^{\ln(a^x)} = De^{x\ln(a)}$$

$$\underset{\substack{\text{regola per le}\\ \text{funzioni composte}}}{=} e^{x\ln(a)} D(x\ln(a)) = \underbrace{e^{x\ln(a)}}_{=a^x} \ln(a) \quad \blacksquare$$

$$Dx^b = b\,x^{b-1} \quad \text{anche per tutti } b \in \mathbb{R}:$$

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$

$$Dx^b = D\left(e^{\ln(x^b)}\right) = De^{b\ln(x)} = e^{b\ln(x)} D(b\ln(x))$$

$$= x^b \left(b\frac{1}{x}\right) = b\,x^{b-1}. \quad \blacksquare$$

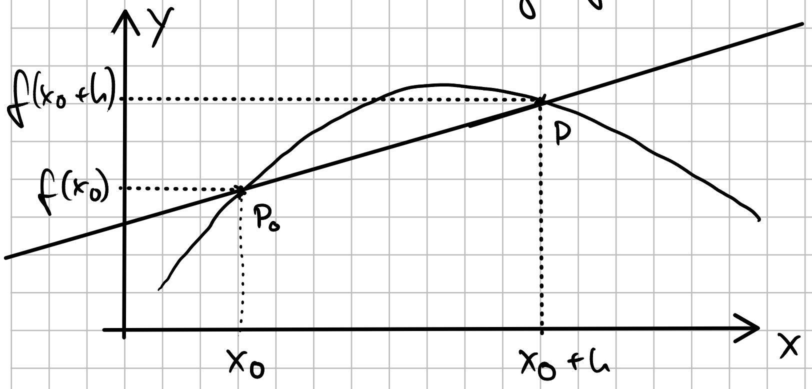
Questo contiene: $Dx^n = n x^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
$D\frac{1}{x} = D(x^{-1}) = -\frac{1}{x^2}$.

Da ricordarsi:

$f(x) =$	$x^b,\ b \in \mathbb{R}$	$\ln(x)$	e^x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\operatorname{tg}(x)$
$f'(x) =$	$b\,x^{b-1}$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

Significato geometrico della derivata:

Consideriamo il grafico di una funzione f, per esempio:



Una retta secante il grafico nei punti
$P_0 = (x_0, f(x_0))$
$P = (x_0+h, f(x_0+h))$

Una generica retta: $y = mx + q$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$.

Per determinare m, q:

(1) passaggio per P_0: $f(x_0) = mx_0 + q$

(2) " per P: $f(x_0+h) = m(x_0+h) + q$

Seconda meno prima equazione: "(2) − (1)"

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \cancel{mx_0} + mh + \cancel{q} - \cancel{mx_0} - \cancel{q}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$: il rapporto incrementale.

Inserire m nella prima equazione, (1):

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} x_0 + q$$

$$\Rightarrow \quad q = f(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} x_0$$

Risultato: la retta secante è

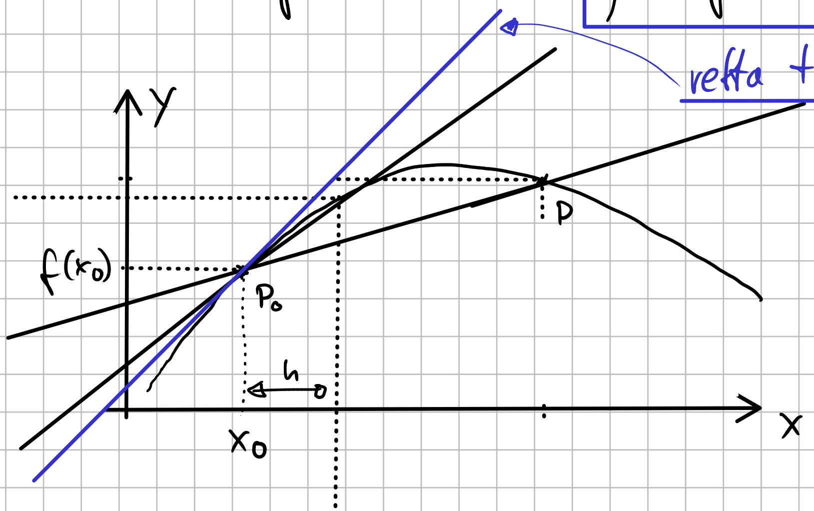
$$y = \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{m} x + \underbrace{\left(f(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} x_0 \right)}_{q}$$

o equivalentemente:

$$y = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} (x - x_0) + f(x_0).$$

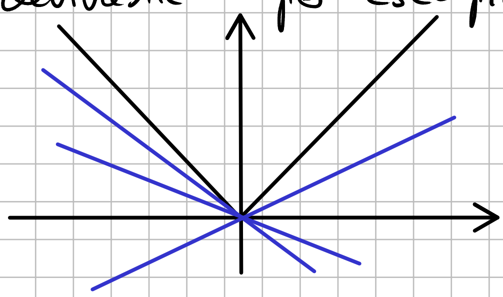
Per $h \to 0$ e f derivabile: $\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$

retta tangente



Pendenza della retta tangente: $f'(x_0)$

Se f non è derivabile: per esempio $f(x) = |x|$, nel $x_0 = 0$:



Non è definita una (unica) tangente.

Applicazione:

per approssimare una funzione:

1) Vediamo una bici in strada al tempo t_0 e sappiamo solo $s(t_0)$, $v(t_0)$:

$s(t_0) = 10\,km$ distanza

$v(t_0) = s'(t_0) = 24\,\frac{km}{h}$ velocità

Probabilmente dopo altri dieci minuti la distanza sarà:

$$10\,km + \left(\frac{1}{6}h\right)\frac{24\,km}{h} = 14\,km.$$

$$s(t_0) + (t-t_0)\,s'(t_0) \approx s(t)$$

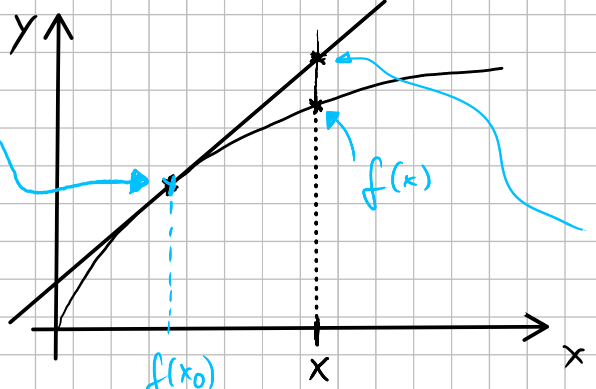
È la formula per la retta tangente!

L'approssimazione è meglio se conosciamo anche l'accelerazione $s''(t_0)$: Formula di Taylor (la vediamo tra 1-2 settimane).

2) Per calcolare $\sqrt{x}$, per esempio $\sqrt{2}$:

$f(x) := \sqrt{x}$.

Supponiamo che conosciamo $f(x_0)$ e $f'(x_0)$, e vogliamo trovare $f(x)$ per $x \neq x_0$ (e non molto lontano da x_0).



l'approssimazione per $f(x)$: la retta tangente:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0) + \sqrt{x_0}$$

Cominciamo con un trucco: $\sqrt{2} = \frac{1}{10}\sqrt{200}$.

Il quadrato più vicino a 200 è: $196 = 14^2$.

Poniamo $x_0 = 196$, $x = 200$:

$$\underbrace{\sqrt{200}}_{\text{la funzione}} \underbrace{\approx}_{\text{approssimazione}} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\sqrt{x_0}}_{\text{La retta tangente.}} = \frac{1}{2\cdot 14}(200-196)+14$$

$$= \frac{1}{7}+14 = 14.1428\ldots$$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{1}{10}\sqrt{200} \approx \frac{1}{10}\,14.1428\ldots = 1.41428\ldots$

(Valore essatto: $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$)

Fine del capitolo

Non rilevante per l'esame:

Un gioco: Sia $a \in \mathbb{N}$

Definiamo la funzione: $f(a) = \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{se } a \text{ è pari} \\ 3a+1 & \text{se } a \text{ è dispari} \end{cases}$

Iterazione: $a, f(a), f(f(a)), \ldots$

Una successione diversa per ogni numero iniziale $a \in \mathbb{N}$.

Esempio: $a=13$, $f(a)=40$, $f(f(a))=20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1\ldots$

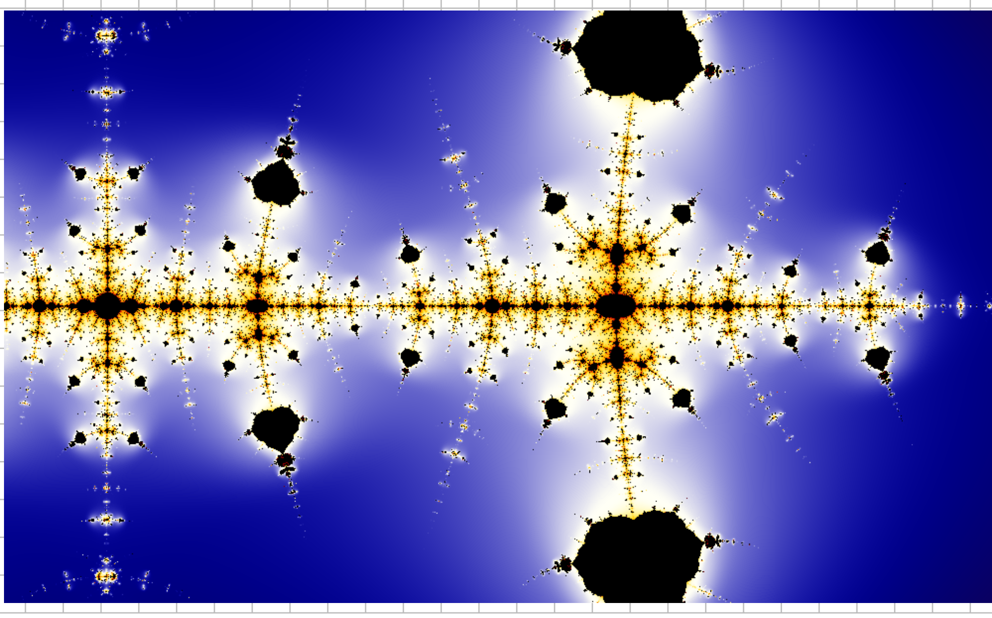
Nessuno sa se arriviamo sempre nel loop $4 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto 4$!

Controllato col computer: vero per ogni $a \leq 87\cdot 2^{60}$.

In generale rimane un problema aperto.

Ma esiste una connessione col frattale seguente, usando numeri complessi:

Ne parliamo un po' di più un altro giorno...

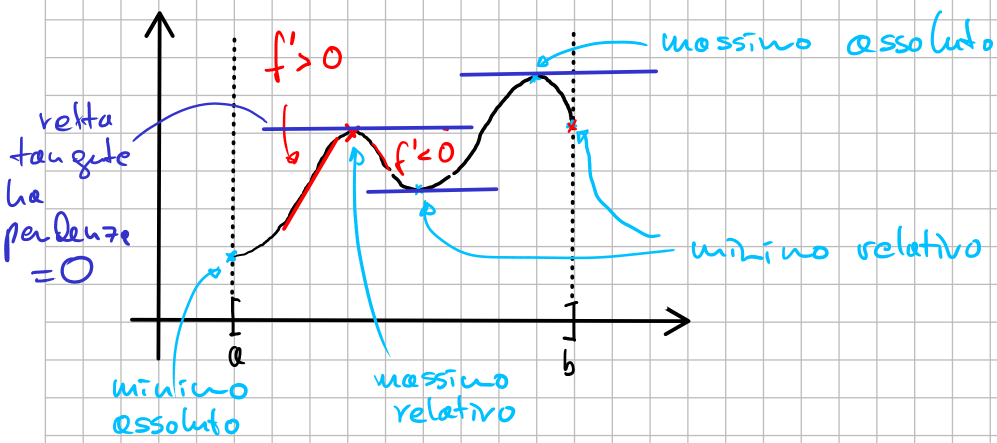


fine del gioco

Studio di funzioni: (rilevante per l'esame)

Massimi e minimi relativi

Cos'è un massimo relativo?



Definizione: Sia f definita in $[a,b]$. Un punto $x_0 \in [a,b]$ è di massimo relativo per f nell'intervallo $[a,b]$, se esiste un $\delta > 0$ tale che

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{per ogni } x \in [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Un punto $x_0 \in [a,b]$ è di massimo assoluto per f nell'$[a,b]$ se:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{per ogni } x \in [a,b].$$

Un massimo assoluto è anche un massimo relativo!

Nel massimo relativo, la retta tangente ha pendenza $= 0$.

Teorema di Fermat: Sia f una funzione definita in $[a,b]$, e sia x_0 un punto di massimo o minimo relativo. Se $x_0 \in (a,b)$ e f è derivabile in x_0, risulta:

importante!

$$f'(x_0) = 0.$$

Dimostrazione: Consideriamo il caso in cui x_0 sia un punto di massimo relativo. Allora esiste $\delta > 0$ tale che:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h) \quad \forall h \in (-\delta, \delta).$$

Per $h > 0$: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$

Per $h < 0$: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$,

$\lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$.

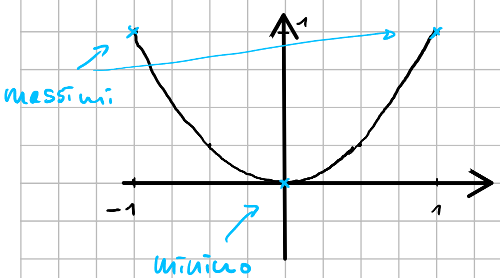
Ma f è derivabile $\Rightarrow \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esiste.

Se il limite esiste, abbiamo sempre: limite destro uguale limite sinistro.

L'unica possibilità è: $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0 = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0 = f'(x_0)$. ■

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $f(x) = x^2$ con dominio $[-1,1]$.



Ha un minimo (assoluto e relativo) in $x = 0$.

La derivata è: $f'(x) = 2x$.

$f'(0) = 0$. ✓

Abbiamo anche due massimi: nel $x = -1$ e $x = 1$.

$f'(-1) = -2$, $f'(1) = 2$. ← Possibile perchè $-1 \notin (-1,1)$, $1 \notin (-1,1)$.

$f'(x) = 2x \neq 0$ per ogni $x \neq 0 \Rightarrow$ non è possibile avere altri massimi o minimi relativi nell' $(-1,1)$.

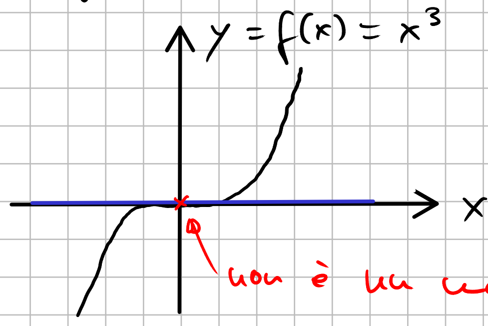
Conclusione: Per trovare i minimi e massimi relativi, basta controllare i punti x con $f'(x) = 0$ e anche gli estremi dell'intervallo.

⚠ **Attenzione:** $f'(x) = 0$ non implica che x è un punto di massimo o minimo.

Per esempio: $f(x) = x^3$ con dominio $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ può essere un max/min.

Ma se controlliamo il grafico: Ovviamente $x = 0$ non è un punto di massimo o minimo relativo.



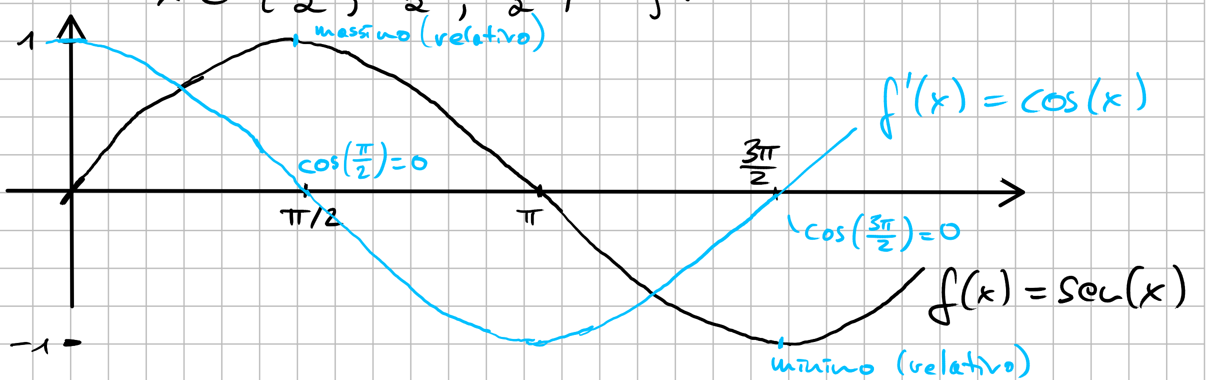
(Ma almeno sappiamo $f'(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, allora $x = 0$ era l'unico candidato per un massimo e minimo.)

Esempio: Dove sono i massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = \operatorname{sen}(x)$?

Derivata: $f'(x) = \cos(x)$.

Punti possibili: x con $\cos(x) = 0$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \right\}.$$



Teorema di Rolle: Sia f una funzione continua in $[a,b]$, è derivabile in (a,b).
Se $f(a) = f(b)$, esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ per cui $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione: Settimana prossima.