Esercizio III: Continuità e Derivate

Correggo le prime tre soluzioni che arrivano nella mia email niels.benedikter@unimi.it **dopo** lunedì 30 marzo, 12:00.

Soluzione alla lezione di martedì 31 marzo.

Problema 1: Teoria — Continuità

A lezione ho dato i punti principali della dimostrazione del *teorema di continuità delle funzioni inverse*. Scrivi una dimostrazione con tutti i detagli!

Problema 2: Esempi — Continuità

a. Usa il metodo di ε e δ per dimostrare la continuità della funzione $f(x) = x^3$ sul dominio $\mathbb{R}$.

b. Sia

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} , \qquad \text{e} \qquad g(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) .$$

Dimostra che $\lim_{y\to 0} f(y) = 0$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ ma $\lim_{x\to 0} f(g(x)) \neq 0$. Spiega la compatibilità di questo risultato con i teoremi visti a lezione. (Sto pensando a due teoremi particolari qui – quali sono?)

Problema 3: Teoria — Derivate

Chiamiamo una funzione f con dominio $\mathbb{R}$ pari se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e dispari se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dimostra: Se f è pari, la derivata f' è dispari. Se f è dispari, la derivata f' è pari.

Problema 4: Esempi — Derivate

a. Dimostra: La funzione $f(x) := x|x|$ con dominio $\mathbb{R}$ ammette per $x = 0$ la derivata prima ma non la derivata seconda.

b. Usi *la definizione* di derivibilità per calcolare la derivata prima e seconda della funzione $f(x) := \frac{1}{x}$ sul dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c. Calcola (usando le regole per gli operazioni con le derivate) la derivata prima e seconda della funzione $g(x) := (\operatorname{sen}(x))^2 + x^2$.