

# Matematica del continuo

da risolvere entro 17 marzo 2020, 10:30

## Problema 1: Teoria

Nelle lezioni abbiamo detto che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  significa

$$\forall x_n \rightarrow x_0 \text{ con } x_n \in A \setminus \{x_0\} : f(x_n) \rightarrow +\infty \quad (1)$$

o equivalentemente

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \text{ e } x \neq x_0 \text{ e } x \in A \Rightarrow f(x) > M . \quad (2)$$

Dimostra l'equivalenza di (1) e (2).

## Problema 2: Teoria

Dimostra: [teorema introdotto a lezione, soluzione nel libro]

Siano  $g : X \rightarrow Y$  e  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = l ,$$

ed esista un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che risulti  $g(x) \neq y_0$  per ogni  $x \in I \setminus \{x_0\}$ . Allora è anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l .$$

## Problema 3: Esempi

- Dimostra: il limite della funzione  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  per  $x \rightarrow 0$  non esiste.
- Dimostra: la funzione  $f(x) = |x| \sin(x)$  non ha un limite per  $x \rightarrow +\infty$ .
- Sia  $a > 0$ . Il limite  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x}$  esiste? Scrivi una dimostrazione per la tua risposta usando il metodo di  $\varepsilon$  e  $\delta$ . Se esiste, cos'è il suo valore?
- Il limite  $\lim_{x \rightarrow -1} \log(x)$  esiste? Scrivi una dimostrazione per la tua risposta. Se esiste, cos'è il suo valore?
- Qual è il limite di  $f(x) := \frac{1 - \cos(x)}{x}$  per  $x \rightarrow 0$ ? Scrivi una dimostrazione per la tua risposta.