# Esercizio V

Correggo le prime tre soluzioni che arrivano nella mia email niels.benedikter@unimi.it **dopo** lunedì 20 aprile, 12:00.

Soluzione alla lezione di martedì 21 aprile.

## Problema 1: Funzioni concave e convesse

Consideriamo la funzione $f(x) := x^3 - x^2$ su $\mathbb{R}$. Dove è convessa, dove è concava, dove sono punti di flesso?

## Problema 2: Animale nella foresta

Un*a ciclista percorre una strada completamente piana, con una curva descritta dal grafico della funzione $f(x) = x^2$. La curva è molto lunga, include tutti i valori $x \in \mathbb{R}$. La direzione di viaggio è da $x$ positivo a $x$ negativo. Guardando sempre esattamente in direzione frontale, in quale punto della strada la/*/il ciclista vede l'oca al punto $x = -2$, $y = -1$?

## Problema 3: Minimi e Massimi

Consideriamo la funzione $f(x) := x^3(x-4)^2$ con dominio $\mathbb{R}$. Trova tutti i minimi e massimi relativi di $f$. (In particolare, dimostra per ogni punto $x_0$ con $f'(x_0) = 0$ se è un minimo, un massimo, o né l'uno né l'altro!)

## Problema 4: Teorema di L'Hôpital: Esempi

A lezione abbiamo visto che il teorema di l'Hôpital vale per limiti (anche limite destro o sinistro) del tipo "$\frac{0}{0}$" e "$\frac{\infty}{\infty}$". I problemi seguenti sono da risolvere *senza* usare il "confronto degli infiniti". (Se è troppo difficile, controlla nel libro.)

**a.** Forme indeterminate del tipo "$0 \cdot \infty$": Calcola $\lim_{x \to 0+} x^b \ln(x)$, dove $b$ è un parametro positivo (non necessariamente un numero intero).

**b.** Forme indeterminate del tipo "$\infty - \infty$": Calcola

$$\lim_{x \to 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right) .$$

**c.** Forme indeterminate del tipo "$0^0$": Calcola $\lim_{x \to 0+} x^x$.

**d.** Forme indeterminate del tipo "$1^\infty$": Calcola $\lim_{x \to 0} (1 + \mathrm{sen}(x))^{1/x}$.

## Problema 5: Teorema di L'Hôpital: Teoria

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Siano $f$ e $g$ funzioni con $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e esista un intorno $I$ di $x_0$ con $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ . Siano $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

*Dimostra:* Se il limite alla destra dell'uguaglianza esiste, abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \ln \left( \lim_{x \to x_0} \frac{e^{f(x)} f'(x)}{e^{g(x)} g'(x)} \right) .$$

## Problema 6: Ricapitolazione: Continuità e Limiti — Teoria

Da rispondere senza aprire il libro/senza leggere gli appunti o i riassunti:

**a.** Qual è la definizione di convergenza di una successione?

**b.** Qual è la definizione di convergenza di una funzione?

**c.** Richiama la dimostrazione del fatto che il "metodo con $\varepsilon$ e $\delta$" implica la convergenza nel senso **b.**

## Problema 7: Ricapitolazione: Continuità e Limiti — Esempi

Consideriamo le funzioni $f$ e $g$ sul dominio $\mathbb{R}$ definite come segue:

$$\text{Per ogni } n \in \mathbb{Z}\text{: } f(x) := x - n \quad \text{per } x \in [n, n+1)$$

$$\text{Per ogni } n \in \mathbb{Z}\text{: } g(x) := \begin{cases} x - n & \text{per } x \in [n, n + \frac{1}{2}) \\ 1 - x + n & \text{per } x \in [n + \frac{1}{2}, n+1) \end{cases}$$

**a.** Disegna il grafico di $f$ e $g$ in un modo quantitativo.

**b.** La funzione $f$ è continua? Esiste il limite $\lim_{x \to 0} f(\frac{1}{x})$?
(Attenzione: l'argomento della funzione nel limite è $\frac{1}{x}$.)

**c.** La funzione $g$ è continua? Esiste il limite $\lim_{x \to 0} g(\frac{1}{x})$?