Esercizio IV: Derivate

Correggo le prime tre soluzioni che arrivano nella mia email
niels.benedikter@unimi.it **dopo** lunedì 6 aprile, 12:00.

Soluzione alla lezione di martedì 7 aprile.

Problema 1: Derivate

a. Qual'è la derivata della funzione $\log_a(x)$ sul dominio $(0,+\infty)$?

b. Quali sono le derivate prime e seconde delle funzioni seguenti?

$$f(x) = \ln(\operatorname{sen}(x^2)) \ , \quad g(x) = e^{-x^2} \ , \quad h(x) = x \ln(x) \ .$$

Problema 2: Le funzioni trigonometriche inverse

Le funzione trigonometriche non sono monotone su tutto $\mathbb{R}$, e non esistono le loro funzioni inverse **su** $\mathbb{R}$. Ma $\operatorname{sen}(x)$ e strettamente crescente nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, allora esiste la funzione inversa, chiamata $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

a. Spiega come disegnare una funzione inversa f^{-1}, se è conosciuto il grafico della funzione f. Fai un disegno della funzione arcsen, e verifica con un programma della tua scelta (per esempio Mathematica, Matlab, Octave, Gnuplot,...) o controlla il risultato online.

b. Dimostra che la derivata della funzione arcsen è

$$\mathrm{D} \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Ripeti i passi **a.** e **b.** per la funzione $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ e la funzione $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. (È importante prima capire come sono definiti esattamente!)

Problema 3: Minimi e Massimi

Quali punti sono candidati per essere minimi o massimi relativi per la funzione seguente?

$$f(x) := \frac{1}{6}x^3 + 1.25x^2 - 7x + \pi \ , \quad \text{nell'intervallo } [-5,3] \ .$$

Poi usa un programma per controllare se i candidati sono veramente minimi o massimi relativi, e cerci il massimo e minimo assoluto.

Problema 4: ***(opzionale)*** **Derivazione delle funzioni inverse**

A lezione abbiamo visto il **teorema di derivazione delle funzioni inverse**: Sia f una funzione continua e strettamente crescente (o strettamente decrescente) in un intervallo $[a, b]$. Se f è derivabile in un punto $x \in (a, b)$ e se $f'(x) \neq 0$, allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$ e

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \, .$$

Dimostra il teorema. (Se non riesci, studia la dimostrazione nel libro e spiegala a modo tuo. Devi capire ed essere convinto di ogni passo che scrivi!)