

## Fisica Matematica 3

### Esercizi di Meccanica Quantistica – Settimana 2

Soluzione da consegnare entro **lunedì, 6/5/2024, 15:30** via email (scannerizzata o  $\text{\LaTeX}$ ) a Diwakar Naidu, diwakar.naidu@unimi.it

#### Problem 1: Proiezione Ortogonale (7 punti)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormale di  $\mathcal{H}$ .

Calcolare la proiezione ortogonale dei vettori  $e_1 + 2e_2$  e  $e_1 - 2e_2$  sullo sottospazio  $\text{span}\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}e_n\}$  di dimensione  $= 1$ .

Si può usare senza dimostrazione  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

#### Problem 2: Complemento Ortogonale (7 punti)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert. Sia  $A \subset \mathcal{H}$  un sottoinsieme.

Dimostrare che  $A^\perp$  è un sottospazio e chiuso.

#### Problem 3: Norma Operatoriale (7 punti)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e  $A, B, C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  operatori limitati, sia  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Abbiamo definito  $\|A\| := \sup\{\|A\psi\| : \psi \in \mathcal{H} \text{ e } \|\psi\| = 1\}$ .

Dimostrare che

$$\begin{aligned}\|A\| &> 0 \text{ se } A \neq 0, \\ \|\lambda A\| &= |\lambda| \|A\|, \\ \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\|, \\ \|CA\| &\leq \|C\| \|A\|.\end{aligned}$$