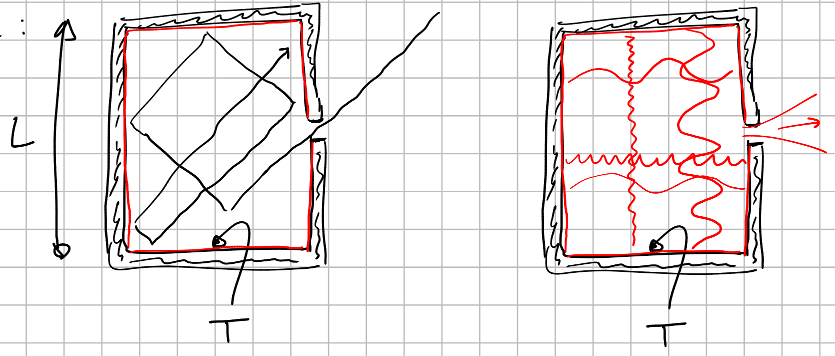
5.5 Esempio: la legge di Planck + applicazione

Calcolare la radiazione elettromagnetica di un corpo nero.

Realizzazione:



I fotoni sono particelle relativistici senza massa:

$$\mathcal{E}(p) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}, \qquad m = 0$$

$$= c\,|p|. \qquad (c = \text{velocità della luce}).$$

$$\mathcal{E}(k) = \hbar c\,|k| \qquad k \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3.$$

$$\left(H = \sqrt{c^2(-\Delta) + m^2c^4} = c\,|\nabla|, \quad \text{autovettori: } \frac{1}{L^{3/2}} e^{ik\cdot x}. \right)$$

Nel cubo: un gas di fotoni. I fotoni sono bosoni.

Ogni momento p può essere occupato con $n_p \in \mathbb{N}$ bosoni:

L'energia media diventa:

$$\langle \mathcal{E}(k) \rangle_\beta = \hbar c\,|k| \,\langle n(k) \rangle_\beta \qquad n(k) = \text{numero di fotoni}$$

$$= \hbar c\,|k| \frac{1}{e^{\beta \mathcal{E}(k)} - 1} \qquad \leftarrow \text{distribuzione di Bose-Einstein}$$

$$= \frac{\hbar c\,|k|}{e^{\beta\hbar c|k|} - 1} \qquad \text{per } k \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3.$$

Quanti fotoni ci sono con una energia $\hbar c\,|k|$?

Integrare rispetto la direzione di k, pensando a $L \to \infty$:

$$\frac{1}{L^3} \sum_{k:\,|k|\text{ fisso}} \langle \mathcal{E}(k) \rangle_\beta = \frac{\cancel{L^3}}{(2\pi)^3} \underbrace{\frac{(2\pi)^3}{L^3} \sum_{k:\,|k|\text{ fisso}}}_{\text{diventa un integrale } \int d\sigma^2(k) \text{ superficie}} \langle \mathcal{E}(k) \rangle_\beta \,\cancel{\frac{1}{L^3}}$$

per volume

$$\simeq \frac{1}{(2\pi)^3} \underbrace{\int_{\mathbb{S}^2} d\sigma^2(k)}_{= 4\pi} \frac{\hbar c\,|k|}{e^{\beta\hbar c|k|} - 1} |k|^2$$

$$\omega(k) = |k|\hbar c$$

$$= \frac{2\hbar c}{4\pi^2} \frac{|k|^3}{e^{\beta\hbar c|k|} - 1} = \frac{1}{2\pi^2\hbar^2c^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega} - 1}.$$

×2 helicità:

$$\boxed{u(\omega) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}}$$

legge di Planck 1900

$u(\omega)$ = energia per volume, con energia del singolo fotone ω.

L'energia totale per volume

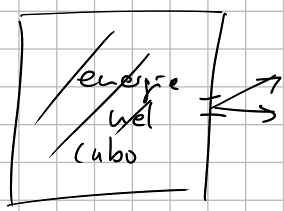
$$\int_0^\infty d\omega\, u(\omega) = \frac{1}{\pi^2\hbar^2c^2}\int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{e^{\beta\omega}-1}$$

trucco: $\tilde{\omega} := \beta\omega$

$d\tilde{\omega} = \beta d\omega$

$$= \frac{1}{\pi^2\hbar^2c^2}\frac{1}{\beta^4}\underbrace{\int_0^\infty d\tilde{\omega}\frac{\tilde{\omega}^3}{e^{\tilde{\omega}}-1}}_{\text{Integrale che non dipende da i parametri.} \; = \frac{\pi^4}{15}}$$

$$= T^4 k_B^4 \frac{\pi^2}{\hbar^2 c^2 15}.$$



Il flusso di energia che esce dal cubo: legge di Stefan-Boltzmann

$$\boxed{j = \sigma T^4}$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} = 5.670374 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}.$$

L'energia che arriva sull'oggetto fuori:

$$\boxed{P = Aj}$$

A = superficie dell'oggetto.

non obbligatorio (inizio)

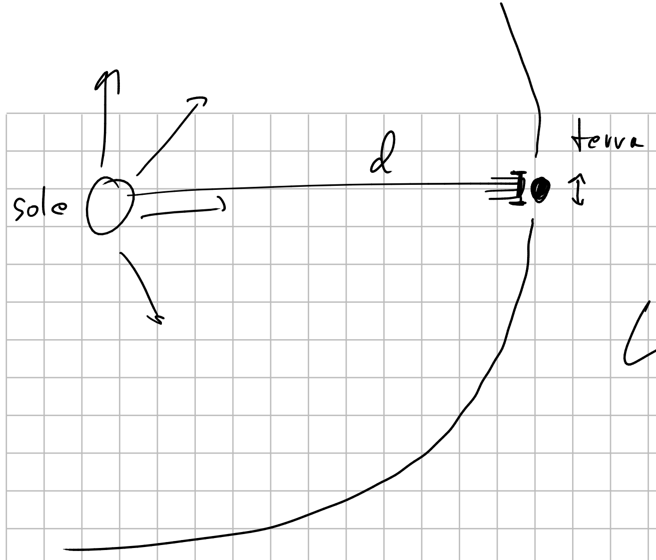
Applicazione: il riscaldamento globale

1) Temperatura di equilibrio di un pianeta

Equilibrio: $L_{in} = L_{out}$

L_{in}: l'energia ricevuta dal sole

L_{out}: la radiazione termica persa nel vuoto.



$$A = \pi R^2 \qquad R = \text{raggio della terra.}$$

$$L_{in} = L \frac{\pi R^2}{4\pi d^2}$$

$$\text{con } L = 3.83 \cdot 10^{26} \frac{J}{s}.$$

Per la radiazione termica della terra si usa la legge di Stefan-Boltzmann:

$$L_{out} = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Nell'equilibrio: $L_{in} = L_{out} \Rightarrow T = 277K.$

Con l'effetto di riflessione con le nuvole:

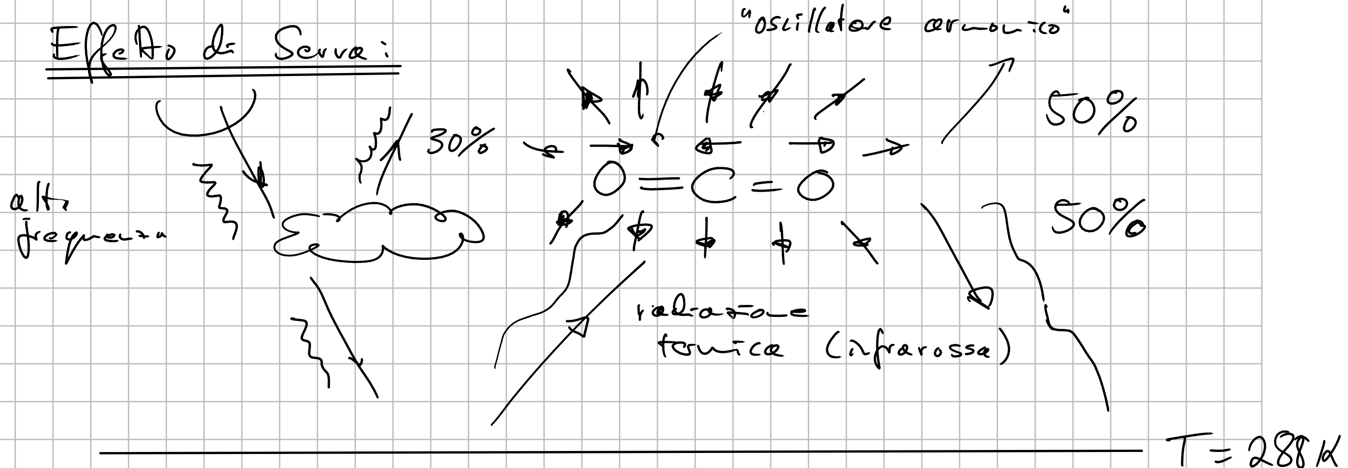
$$L_{in} \approx 0.7 \cdot \pi R^2 \frac{1}{4\pi d^2}.$$

Si trova: $T = 255K = -18°C.$

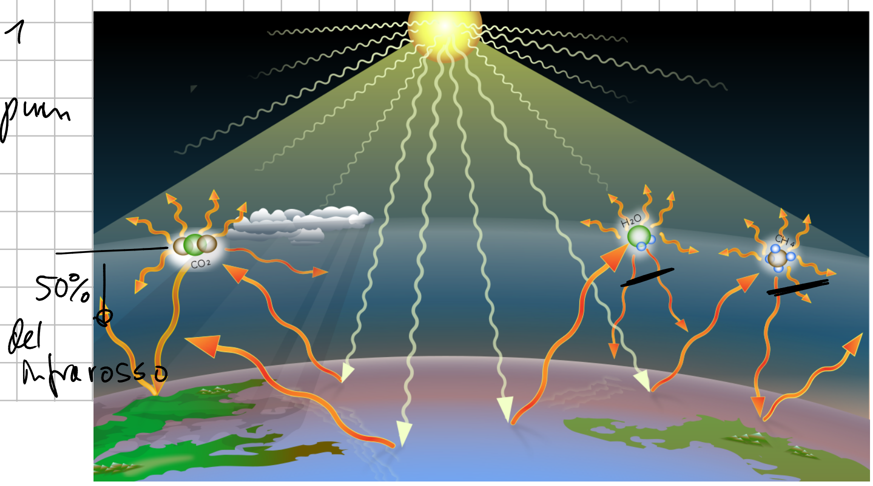
Misurato invece: $T = 288K = 14°C.$

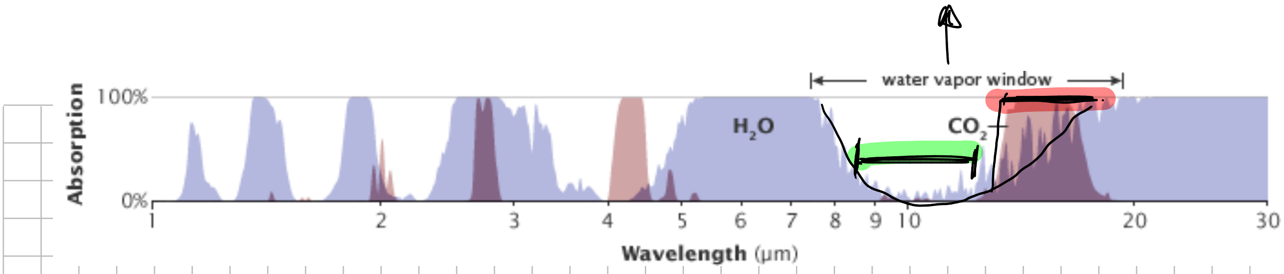
l'effetto di serra naturale.

Effetto di Serra:

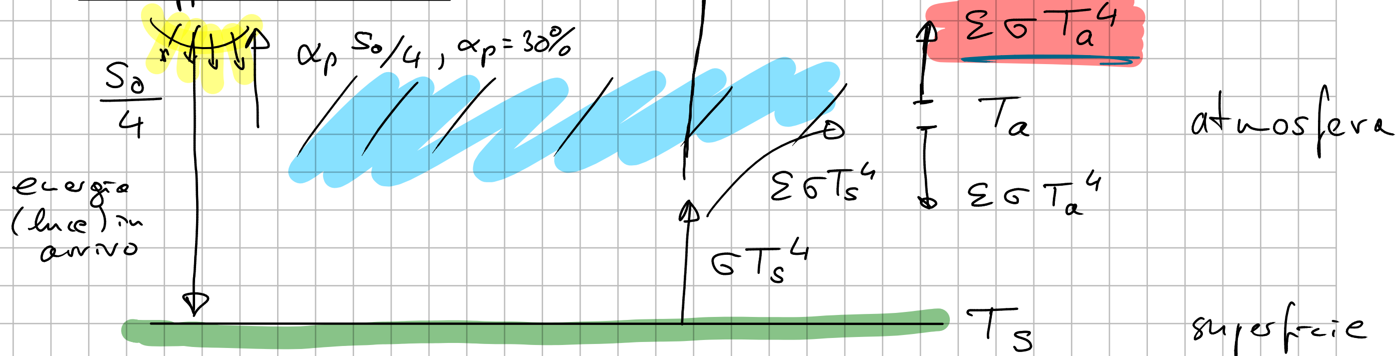


CO_2: 1750 280ppm $\xrightarrow{50\%}$ 2021 419ppm





2) L'effetto serra



Equilibrio atmosfera:

$$\varepsilon\sigma T_s^4 - 2\varepsilon\sigma T_a^4 = 0 \Rightarrow T_a = \frac{T_s}{2^{1/4}}.$$

Equilibrio dei flussi sulla superficie:

$$\frac{1}{4}S_0(1-\alpha_p) + \varepsilon\sigma T_a^4 - \sigma T_s^4 = 0.$$

$$(*) \qquad T_s = \left[\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\,\frac{1}{4\sigma}S_0(1-\alpha_p)\right]^{1/4}.$$

Con $\varepsilon = 0$: senza effetto serra $T = -18°C$.

Misurato: $T_s = 288\,K$, e allora $\varepsilon = 0.78$.

Si può misurare che per CO_2 raddoppiato:

$$-3.71\,\frac{W}{m^2} = \Delta F_\uparrow = \Delta F_\uparrow^{antrop} - \Delta F_\uparrow^{preindustriale}$$

$$= (1-\varepsilon_{antro})\sigma T_s^4 + \varepsilon_{antrop}\sigma T_a^4$$

$$-(1-\varepsilon_{pre})\sigma T_s^4 + \varepsilon_{pre}\sigma T_a^4$$

$$= \Delta\varepsilon\cdot\sigma(T_a^4 - T_s^4).$$

Taylor: T_s costante, T_a costante

$$\Delta\varepsilon = 0.019.$$

Tornando indietro con $\varepsilon = 0.78 + \Delta\varepsilon$ si ottiene

$$\Delta T_S = 1{,}2\,K.$$

non obbligatorio (fine)

Soluzione Esercizi [selezioni da Velenik]

(1) $B(n) = \{-n, \dots n\}^d \Uparrow \mathbb{Z}^d$,

Trovare $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ ma non $\Uparrow \mathbb{Z}^d$.

Ricordiamo: $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d \overset{def.}{\iff} \Lambda_{n+1} \supset \Lambda_n$, $\bigcup_{n\geq 1} \Lambda_n = \mathbb{Z}^d$.

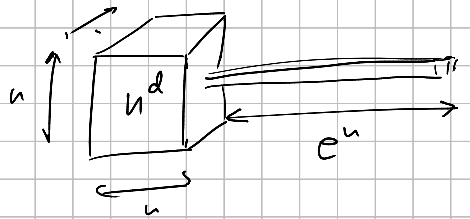
$\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d \overset{def.}{\iff} \Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{|\partial^{in}\Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0.$

$\partial^{in}\Lambda = \{i \in \Lambda : \exists j \notin \Lambda \quad i \sim j\}$

Esercizio 3.1 [Velenik]

- $|B(n)| = (2n+1)^d$, $|\partial^{in} B(n)| = |B(n) \setminus B(n-1)|$
$= |B(n)| - |B(n-1)|$
$\leq d\,(2n+1)^{d-1}$.

- $\Lambda_n := B(n) \cup \{(i, 0, 0, \dots 0) \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq i \leq e^n\} \not\Uparrow \mathbb{Z}^d$.



(2) Ising, $d = 1$, $h = 0$, $\eta = \emptyset$. Descrivere le configurazioni riscalando solo dove $\omega_i\,\omega_{i+1} \neq 1$. Calcolare Ψ.

Esercizio 3.6 [Velenik]:

$$Z^{\emptyset}_{B(n), \beta, 0} = \sum_{\substack{\omega_i = \pm 1 \\ i \in B(n)}} \prod_{i=-n}^{n-1} e^{\beta\,\omega_i \omega_{i+1}}$$

$h = 0$

$$= \sum_{\substack{\omega_i = \pm 1 \\ i \in B(n)}} \underbrace{\prod_{i=-n}^{n-1}}_{2n \text{ termini}} e^{\beta(\omega_i \omega_{i+1} - 1)}\, e^{\beta}$$

$$= e^{2n\beta} \sum_{\substack{\omega_i = \pm 1 \\ i \in B(n)}} \prod_{i=-n}^{n-1} \underbrace{e^{\beta(\omega_i \omega_{i+1} - 1)}}$$

$$= \begin{cases} 1 & \omega_i = \omega_{i+1} \\ e^{-2\beta} & \omega_i \neq \omega_{i+1} \end{cases}$$

quante volte?

$$= 2 e^{2\beta n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(e^{-2\beta}\right)^k$$

teorema binomiale inverso

$$= 2 e^{2\beta n} \left(1 + e^{-2\beta}\right)^{2n}.$$

$$\Rightarrow \psi(\beta) = \log \cosh(\beta) + \log(2).$$

(3) $\langle \sigma_A \rangle^+_{\Lambda,\beta,h}$ è non-decrescente rispetto h.

<u>Esercizio 3.9:</u> [Velenik]

Scrivere $\langle \sigma_A \rangle^+_{\Lambda,\beta,h}$ con la somma rispetto tutte le configurazioni, calcolare la derivata rispetto h_i, usare GKS.

(4) non esiste.

(5) <u>Dimostrare per Ising in $d=2$: $\langle \cdot \rangle^+_{\beta,h}$ è invariante rispetto rotazioni con $\pi/2$.</u>

Esattamente come per l'invarianza rispetto translazioni.

(6) Descrivere l'argomento di Peierls. $\longrightarrow$ riassunto.

(7) <u>Calcolare il potenziale gran canonico per $d=1$,</u>

$$H = -J \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \sigma_{j+1} - h \sum_{j \text{ dispari}} \sigma_j .$$

metodo di matrice di trasformento.

con due: T_{dispari} e T_{pari}.

(8) <u>Sviluppo alta temperatura per $d=1$, $h=0$:</u>

$$e^{\beta \sigma_i \sigma_j} = \cosh(\beta)\left(1 + \tanh(\beta)\, \sigma_i \sigma_j\right).$$

$$\prod_{e \in \mathcal{E}} \left(1 + f(e)\right) = \sum_{E \subset \mathcal{E}} \prod_{e \in E} f(e).$$

(Esattamente come fatto a lezione, si ottiene esplicitamente il risultato però grazie alla scelta $d=1$.)

(9) <u>Calcolare l'evoluzione temporale di uno stato generale:</u>

$$\rho(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \, |f_j(t)\rangle\langle f_j(t)| \qquad f_j(t) \in \mathcal{H}$$

$$i\hbar \partial_t f_j(t) = H f_j(t)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\rho(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \Big(i\hbar \partial_t |f_j(t)\rangle\langle f_j(t)| + |f_j(t)\rangle\langle -i\hbar \partial_t f_j(t)| \Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \Big(H|f_j(t)\rangle\langle f_j(t)| - |f_j(t)\rangle\langle H f_j(t)| \Big)$$

$$\xrightarrow{H = H^*} \; = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \Big(H|f_j(t)\rangle\langle f_j(t)| - |f_j(t)\rangle\langle f_j(t)| H \Big)$$

$$= [H, \rho(t)].$$

(10) $$H = \sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}^3} \hbar \omega_k \, a_k^+ a_k$$

a_k^+, a_k sono operatori di creazione/annichilazione per un oscillatore armonico per ogni k.

$$\text{spettro}(H) = \sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}^3} \hbar \omega_k \, n_k \qquad (n_k \in \mathbb{N})$$

autovettori: $|n_1, n_2, \dots n_i, \dots\rangle$

Come per la legge di Planck/gas di Bose.

Calcolare Z. Per ottenere $\overline{E}$: derivata rispetto β di Z.