SOLUZIONI PER GLI ESERCIZI DEL 19/5/2022

(1) L'entropia, l'energia libera, e il potenziale gran canonico per $H(p,q) = K(p) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{|p_i|^2 + m^2}$ dove $p_i \in \mathbb{R}^3$.

Idea: usare l'insieme canonico. (o gran-canonico).

$$Z(N,T,V) = \int_{\Lambda^N \times \mathbb{R}^{3N}} \frac{dp\,dq}{N!} e^{-\beta H(p,q)} \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$= |\Lambda|^N \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}^3} dp_1 \int_{\mathbb{R}^3} dp_2 \cdots \int_{\mathbb{R}^3} dp_N \prod_{i=1}^{N} e^{-\beta\sqrt{p_i^2+m^2}}$$

$$= \frac{V^N}{N!} \prod_{i=1}^{N} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^3} dp_i\, e^{-\beta\sqrt{p_i^2+m^2}} \right)}_{I(\beta,m)} = \frac{(V I(\beta,m))^N}{N!}.$$

$$I(\beta,m) = \int_{\mathbb{R}^3} dp\, e^{-\beta\sqrt{p^2+m^2}} = \int_0^\infty 4\pi r^2\, dr\, e^{-\beta\sqrt{r^2+m^2}}.$$

Trasformata di Legendre da β a E.

Da calcolare: $$\bar{E} = \langle H(p,q) \rangle_{N,\beta,V} = \underbrace{\frac{1}{Z(N,\beta,V)} \int \frac{dp\,dq}{N!} \left(e^{-\beta H(p,q)} H(p,q)\right)}_{\text{non usare questa}}.$$

Per calcolarla: $-\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z(N,\beta,V)$ usare questa formula

$$= -\frac{1}{Z(N,\beta,V)} \frac{\partial}{\partial\beta} \int \frac{dp\,dq}{N!} e^{-\beta H(p,q)} = \bar{E}.$$

$\Rightarrow$ Così si ottiene $\bar{E}(N,\beta,V)$.

Invertire $\bar{E}$ per ottenere $T(\bar{E},N,V)$.

Trasformata di Legendre: $F(N,T,V) = \bar{E} - TS(N,\bar{E},V)$

$$\Leftrightarrow S(N,\bar{E},V) = \underbrace{-\frac{1}{T}F(N,T,V) + \bar{E}\frac{1}{T}}_{\text{da leggere con } T = T(\bar{E},N,V)}$$

Una variazione per cui si può fare tutti i conti senza Mathematica: $m = 0$. "fotoni classici".

$$I(\beta,0) = 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 e^{-\beta r} = \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} 4\pi \int_0^\infty dr\, e^{-\beta r}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left(4\pi \frac{1}{\beta}\right) = \frac{8\pi}{\beta^3}. \qquad \bar{E} = 3NT. \quad (k_B = 1).$$

(2) ΔS per l'equilibrazione della pressione

→ si veda l'esercizio dell'equilibrazione della temperatura, usando S del gas ideale.

---

(3) Calcolare $\overline{E}(\beta)$ per $H(p,q) = \sum_{i=1}^{N} \left(p_i^2 + \frac{k}{2} q_i^2\right)$.

Usare β come variabile libera, allora insieme canonico.

$$Z(N,T,V) = \int_{\Lambda^N \times \mathbb{R}^{3N}} \frac{dp\, dq}{N!} e^{-\beta H(p,q)} = \int_{\Lambda^N \times \mathbb{R}^{3N}} \frac{dp\, dq}{N!} e^{-\beta |p|^2} e^{-\beta \frac{k}{2} |q|^2}$$

$$= \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}^{3N}} dp\, e^{-\beta |p|^2} \underbrace{\int_{\Lambda^N} dq\, e^{-\beta \frac{k}{2} |q|^2}}_{= \underbrace{\int_{\Lambda} dq_1\, e^{-\beta \frac{k}{2} |q_1|^2}}_{\simeq \int_{\mathbb{R}^3} dq_1\, e^{-\beta \frac{k}{2}|q_1|^2}} \int dq_2\, e^{-\beta \frac{k}{2} |q_2|^2} \cdots}$$

(N volte)

per Λ molto grande

$$\overline{E}(\beta) = \langle H(p,q) \rangle_{N,\beta,V} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(N,T,V).$$

---

(4) Per (3), calcolare l'entropia direttamente o verso la trasformata di Legendre.

- l'insieme canonico: già fatto in (3).
- " grancanonico: nessuna nuova difficoltà.
- " microcanonico: difficile.

Trasformata di Legendre: come (1).

L'entropia direttamente: si può provare con un trucco:

$$\Omega(N,E,V) := \int_{\mathbb{R}^{3N} \times \Lambda^N} \delta(H(p,q) - E)\, dp\, dq\, \frac{1}{N!}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{3N}\times\Lambda^N} \delta\left(|p|^2 + \frac{k}{2}|q|^2 - E\right) dp\, dq\, \frac{1}{N!}$$

$q \in \Lambda^N \subset \mathbb{R}^{3N}$

Sostituzione: $q\sqrt{\frac{k}{2}} =: q'$, $d^{3N}q' = \left(\frac{k}{2}\right)^{3N/2} d^{3N}q$

$$= \int_{\mathbb{R}^{3N}\times\left(\sqrt{\frac{2}{k}}\,\Lambda\right)^N} \delta\left(|p|^2 + |q'|^2 - E\right) dp\, dq'\, \frac{1}{N!}\left(\frac{2}{k}\right)^{3N/2}$$

$\underline{x} = (p,q)$

$$= \int_{\mathbb{R}^{3N}\times\left(\sqrt{\frac{2}{k}}\,\Lambda\right)^N} \delta\left(|x|^2 - E\right) d^{6N}\underline{x}\, \frac{1}{N!}\left(\frac{2}{k}\right)^{3N/2}$$

!

Coordinate ipersferiche?

Per la situazione $\Lambda = \mathbb{R}^3$.

(Mettiamo solo $\Lambda = \mathbb{R}^3$ per completare i conti.)

($k \to 0$? $k \to \infty$?)

---

(5) $H = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}$, N fisso.

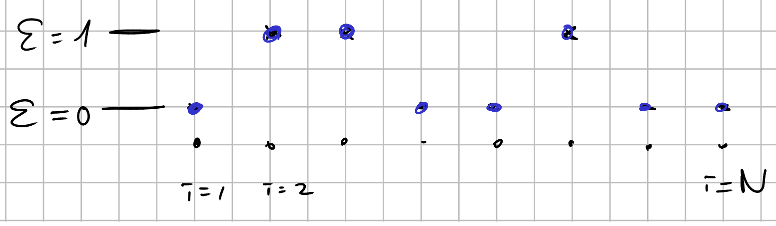
Si può avere $T < 0$?

Usare l'insieme microcanonico.

$\Omega(N,E,V)$ = # configurazioni con (N,E,V)?

$$\Omega(N,E,V) = \frac{1}{N!}\int_{\mathbb{R}^{3N}\times\Lambda^N} \delta(H(p,q) - E)\, dp\, dq$$

Una configurazione era un punto $(p,q) \in \mathbb{R}^{6N}$.



$E = 3 \cdot 1$

Per $E \in \mathbb{N}$ fisso:

$\Omega(N, E) = \#$configurazioni con E posti occupati.

Solo possibile per $E \leq N$.

$$\Omega(N, E) = \frac{N(N-1)\cdots(N-E+1)}{E!} = \frac{N!}{(N-E)!\,E!} = \binom{N}{E}$$

coefficiente binomiale

Osservazione: $\Omega(N, E)$ ha un massimo $E \approx \frac{N}{2}$.

La temperatura è:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(N, E)}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E} k_B \log \Omega(N, E).$$

Per $E > \frac{N}{2}$, $\Omega(N, E)$ è decrescente rispetto E.

Allora per $E > \frac{N}{2}$: $\frac{1}{T} < 0$.

(Questo non succede mai per $H(p, q) = |p|^2 + \sum_{i<j} V(x_i - x_j)$)

Nuovi esercizi:

(1) Dimostrare che $B(n) := \{-n, -n+1, \dots n\}^d \Uparrow \mathbb{Z}^d$ (nel senso di van Hove).
Trovare una successione di insiemi $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ $(\Lambda_{n+1} \supset \Lambda_n, \bigcup_{n\geq 1} \Lambda_n = \mathbb{Z}^d)$ ma non $\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d$.

(2) Consideriamo Ising in $d=1$, $h=0$, $\eta=\emptyset$.
Una configurazione può essere scritta indicando solo dove $\omega_i \neq \omega_{i+1}$.
Qual'è l'energia di una configurazione con k tali punti. Calcolare il potenziale gran canonico così.

(3) Sia $A \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, Λ compatto, $\underline{J} = (J_{ij})$, $\underline{h} = (h_i)$, $\underline{h} \geq 0$.
Dimostrare che $\langle \sigma_A \rangle^+_{\Lambda,\beta,\underline{h}}$ è non-decrescente rispetto $\underline{h}$.

(5) Dimostrare per Ising in $d=2$: $\langle \cdot \rangle^+_{\beta,h}$ è invariante rispetto rotazioni con $\pi/2$.

(6) Descrivere la strategia dello sviluppo di Ising $(d=2)$ per bassa temperatura e l'argomento di Peierls.

(7) Calcolare il potenziale gran canonico in $d=1$:
$$H = -J \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j \sigma_{j+1} + h \underline{\underline{\sum_{j \text{ dispari}}}} \sigma_j .$$
$$\underline{h} = \begin{cases} h & \text{per } j \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } j \text{ pari}. \end{cases}$$

(8) Usare lo sviluppo di alta temperatura per calcolare Φ dell'Ising con $d=1$ e $h=0$.

(9) Sia $\rho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ uno stato (generale) di un sistema con Hamiltoniano H.

L'equazione di Schrödinger è: $i\partial_t \Psi = H\Psi$.

Qual'è la equazione dell'evoluzione temporale di ρ?

(10) Considerare l'operatore: $H = \sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}^3} \hbar\, \omega_k (a_k^+ a_k + \cancel{\tfrac{1}{2}})$.

oscillatori armonici.

Fononi sono bosoni.

- Ottenere una base di autovettori di H.
- Calcolare $\overline{E}(\beta)$.
- Calcolare il calore specifico
$$C := \frac{\partial E}{\partial T}.$$
- (Dipende da ω_k.) $\omega_k = \omega$, non dipende k.
  $\omega_k = 0$ per k molto grande.

  Approssimazione può essere: temperatura alta: espansione $k_B T \gg \hbar\omega$.

Lunedì: NO LEZIONE (tempo per gli esercizi!)

Martedì: ultima lezione ufficiale (orario normale)

- 1 esempio
- soluzioni esercizi

giovedì: se necessario 1 ora (11:15–12:00).

- discussione soluzioni esercizi
- domande