Da dimostrare: uniformemente in $|\Lambda|$:

$$\mu^+_{\Lambda,\beta,0}(\sigma_0 = -1) \leq \delta(\beta) \xrightarrow[(\beta\to\infty)]{} 0.$$

Ottenuto: $\mu^+_{B(n),\beta,0}(\sigma_0 = -1) \leq \sum_{\substack{\gamma_* \text{ è un profilo:} \\ 0 \in Int(\gamma_*)}} \mu^+_{B(n),\beta,0}(\gamma_* \in \Gamma)$.

dipende da ω

<u>Lemma 17:</u> $\forall \beta > 0$, per ogni profilo γ_*: $\mu^+_{B(n),\beta,0}(\Gamma \ni \gamma_*) \leq e^{-2\beta|\gamma_*|}$.

<u>Dimostrazione:</u> Per ogni profilo γ_*:

$$\mu^+_{B(n),\beta,0}(\Gamma \ni \gamma_*) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega^+_{B(n)} \\ \Gamma(\omega)\ni\gamma_*}} \mu^+_{B(n),\beta,0}(\omega)$$

$$= \sum_{\substack{\omega\in\Omega^+_{B(n)} \\ \Gamma(\omega)\ni\gamma_*}} \frac{\prod_{\gamma\in\Gamma(\omega)} e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\tilde\omega\in\Omega^+_{B(n)}} \prod_{\tilde\gamma\in\Gamma(\tilde\omega)} e^{-2\beta|\tilde\gamma|}}$$

$$= \frac{\sum_{\substack{\omega\in\Omega^+_{B(n)} \\ \Gamma(\omega)\ni\gamma_*}} e^{-2\beta|\gamma_*|} \prod_{\gamma\in\Gamma(\omega)\setminus\{\gamma_*\}} e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\tilde\omega\in\Omega^+_{B(n)}} \prod_{\tilde\gamma\in\Gamma(\tilde\omega)} e^{-2\beta|\tilde\gamma|}}$$

$$= \underbrace{e^{-2\beta|\gamma_*|}}_{\text{ci piace}} \underbrace{\frac{\sum_{\substack{\omega\in\Omega^+_{B(n)} \\ \Gamma(\omega)\ni\gamma_*}} \prod_{\gamma\in\Gamma(\omega)\setminus\{\gamma_*\}} e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\tilde\omega\in\Omega^+_{B(n)}} \prod_{\tilde\gamma\in\Gamma(\tilde\omega)} e^{-2\beta|\tilde\gamma|}}}_{\text{da dimostrare: } \leq 1.}$$

Per ogni configurazione $\omega \in \Omega^+_{B(n)}$ con $\gamma_* \in \Gamma(\omega)$ definiamo la configurazione $\mathcal{E}_{\gamma_*}(\omega)$ in cui abbiamo tolto γ_*.
Per togliere γ_* cambiamo il segno di tutti gli spin circondati da γ_*:

$$\left(\mathcal{E}_{\gamma_*}(\omega)\right)_i := \begin{cases} -\omega_i & \text{se } i \in \mathrm{Int}(\gamma_*) \\ \omega_i & \text{per il resto.} \end{cases}$$

Così:
$$\Gamma(\mathcal{E}_{\gamma_*}(\omega)) = \Gamma(\omega) \setminus \{\gamma_*\}.$$

Sia $\mathcal{E}(\gamma_*)$ l'insieme di tutte le configurazioni che si ottiene togliendo γ_* da una configurazione che contiene γ_*.
Il numeratore diventa:
$$\sum_{\omega:\,\Gamma(\omega)\ni\gamma_*} \prod_{\gamma\in\Gamma(\omega)\setminus\{\gamma_*\}} e^{-2\beta|\gamma|} = \sum_{\omega'\in\mathcal{E}(\gamma_*)} \prod_{\gamma'\in\Gamma(\omega')} e^{-2\beta|\gamma'|}.$$

Siccome $\mathcal{E}(\gamma_*) \subset \Omega^+_{B(n)}$, il rapporto è ≤ 1. ∎

Allora
$$\mu^+_{B(n),\beta,0}(\sigma_0=-1) \leq \sum_{\gamma_*:\,\mathrm{Int}(\gamma_*)\ni 0} e^{-2\beta|\gamma_*|}$$
$$= \sum_{k\geq 4} \sum_{\substack{\gamma_*:\,\mathrm{Int}(\gamma_*)\ni 0 \\ |\gamma_*|=k}} e^{-2\beta k}$$
$$= \sum_{k\geq 4} e^{-2\beta k}\, \#\{\gamma_* : \mathrm{Int}(\gamma_*)\ni 0 \text{ e } |\gamma_*|=k\}.$$

"numero di profili..."

Un profilo γ_* con $\mathrm{Int}(\gamma_*)\ni 0$ e $|\gamma_*|=k$ ha almeno una intersezione con
$$\left\{\left(u-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) : u=1,2,\dots\left[\tfrac{k}{2}\right]\right\} \subset \mathbb{Z}^2_*.$$

Costruisco da questo punto il profilo un segmento alla volta.
Per il primo segmento ho 4 scelte.
Per tutti gli altri segmenti ho al massimo 3 scelte.

$$\#\{\gamma_* : \mathrm{Int}(\gamma_*)\ni 0 \text{ e } |\gamma_*|=k\} \leq \underbrace{\frac{k}{2}}_{\text{scelta del punto di inizio}} \cdot 4 \cdot 3^{k-1}.$$

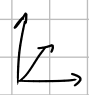
$$\Rightarrow \mu^{+}_{B(n),\beta,0}(\sigma_0=-1) \le \sum_{k\ge 4} e^{-2\beta k}\, \frac{k}{2}\, 4\cdot 3^{k-1} =: \delta(\beta).$$

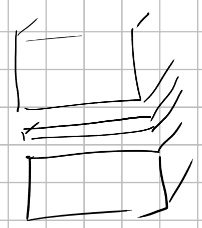
Per β tale che $3e^{-2\beta} < 1$ la serie converge.
Inoltre $\delta(\beta) \to 0$ se $\beta \to \infty$. ∎

<u>Da $d=2$ a $d>2$:</u>

(1) Generalizzare il metodo di Peierls. Contare profili diventa difficile ma è possibile.

(2) Usare GKS per dimostrare che $\beta_c(d)$ è non-crescente rispetto d.





- Si deve considerare $\mathbb{Z}^3$
- Si calcola

$$\frac{\partial}{\partial J_{ij}} \langle \sigma_0 \rangle^{+}_{B(n),\beta,0} = \langle \sigma_0 \sigma_i \sigma_j \rangle^{+}_{B(n),\beta,0} - \langle \sigma_0 \rangle^{+}_{B(n),\beta,0} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^{+}_{B(n),\beta,0} \ge 0.$$

Allora si può abbassare l'accoppiamento del livello $\{j \in \mathbb{Z}^3 : j_3 = 0\}$ con $\{j \in \mathbb{Z}^3 : j_3 = +1\}$ e con $\{j \in \mathbb{Z}^3 : j_3 = -1\}$.

Il livello $\{j \in \mathbb{Z}^3 : j_3 = 0\}$ è Ising in $d=2$.

Allora

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \langle \sigma_0 \rangle^{+}_{B(n),\beta,0}}_{d=3} \ge \underbrace{\lim_{n\to\infty} \langle \sigma_0 \rangle^{+}_{B(n),\beta,0}}_{d=2},$$ allora $\beta_c(3) \le \beta_c(2)$.

4.7 Unicità per $\beta < \beta_c$ e lo sviluppo per alte temperature

Iniziamo con l'osservazione (facile da vedere perché $\sigma_i \sigma_j \in \{\pm 1\}$)

$$e^{\beta \sigma_i \sigma_j} = \cosh(\beta) + \sigma_i \sigma_j \sinh(\beta)$$
$$= \cosh(\beta)(1 + \sigma_i \sigma_j \tanh(\beta)) .$$

Per $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ compatto, e $\omega \in \Omega_\Lambda^+$:

$$e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,0}(\omega)} = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} e^{\beta \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega)}$$
$$= \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^b|} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^b} (1 + \tanh(\beta)\, \omega_i \omega_j) .$$

Usiamo che per ogni insieme finito $\mathcal{E} \neq \emptyset$:

$$\prod_{e \in \mathcal{E}} (1 + f(e)) = \sum_{E \subset \mathcal{E}} \prod_{e \in E} f(e) . \quad \left(\prod_{\emptyset} = 1\right)$$

Così:

$$e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,0}(\omega)} = \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^b|} \sum_{\underset{\uparrow}{E} \subset \mathcal{E}_\Lambda^b} \tanh(\beta)^{|E|} \prod_{\{i,j\} \in E} \omega_i \omega_j .$$

una collezione di segmenti tra primi vicini

$$Z_{\Lambda,\beta,0}^+ = \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^b|} \sum_{E \subset \mathcal{E}_\Lambda^b} \tanh(\beta)^{|E|} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\{i,j\} \in E} \omega_i \omega_j .$$

Scriviamo

$$\prod_{\{i,j\} \in E} \omega_i \omega_j = \prod_{i \in \Lambda} \omega_i^{I(i,E)}$$

con l'incidenza di ω_i:

$$I(i,E) = \#\{j \in \mathbb{Z}^d : \{i,j\} \in E\} .$$

Così:

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{i \in \Lambda} \omega_i^{I(i,E)} = \sum_{\omega_1 = \pm 1} \cdots \sum_{\omega_{2^{|\Lambda|}} = \pm 1} \prod_{i \in \Lambda} \omega_i^{I(i,E)}$$

$$= \prod_{i \in \Lambda} \underbrace{\left(\sum_{\omega_i = \pm 1} \omega_i^{I(i,E)} \right)} = \begin{cases} 2^{|\Lambda|} & \text{se } I(i,E) \text{ sempre pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{se } I(i,E) \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } I(i,E) \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Se una singola incidenza $I(i,E)$ è dispari:
tutto il prodotto $= 0$.

Da tenere: solo $E \subset \mathcal{E}_\Lambda^b$ tale che $I(i,E)$ è sempre pari.

$$\Rightarrow \; Z^+_{\Lambda,\beta,0} = \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^b|} \sum_{E \in \mathcal{E}_\Lambda^{pari}} \tanh(\beta)^{|E|} \, 2^{|\Lambda|}.$$

Dove $\mathcal{E}_\Lambda^{pari} := \{ E \subset \mathcal{E}_\Lambda^b : I(i,E) \text{ è pari } \forall i \in \Lambda \}$.

Ogni $E \subset \mathcal{E}_\Lambda^b$ può essere scritto come un grafo:

<u>Esercizio:</u> Controllate che

$$\langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda,\beta,0} = (Z^+_{\Lambda,\beta,0})^{-1} 2^{|\Lambda|} \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^b|} \sum_{E \in \mathcal{E}_\Lambda^0} \tanh(\beta)^{|E|}$$

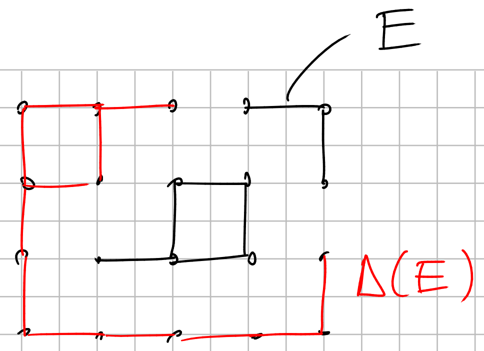
dove

$$\mathcal{E}_\Lambda^0 := \{ E \subset \mathcal{E}_\Lambda^b : I(i,E) \text{ è pari per ogni } i \in \Lambda \setminus \{0\}, \text{ ma } I(0,E) \text{ è dispari} \}.$$

Usando la formula per $Z^+_{\Lambda,\beta,0}$:

$$\langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda,\beta,0} = \frac{\sum_{E \in \mathcal{E}_\Lambda^0} \tanh(\beta)^{|E|}}{\sum_{E \in \mathcal{E}_\Lambda^{pari}} \tanh(\beta)^{|E|}}.$$

Dato un $E \subset \mathcal{E}_\Lambda^b$, sia $\Delta(E)$ l'insieme di tutti i segmenti di $\mathcal{E}_\Lambda^b$ che non condividono un punto con i segmenti di E:



Ogni $E \in \mathcal{E}^0_\Lambda$ può essere scritto come $E = E_0 \cup E'$, dove E_0 è la componente connessa collegata al punto 0, e $E' \in \mathcal{E}^{pari}_\Lambda$ con $E' \subset \Delta(E_0)$.

$$\Rightarrow \langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda,\beta,0} = \underbrace{\sum_{\substack{E_0 \in \mathcal{E}^0_\Lambda \\ E_0 \text{ connesso} \\ \text{che contiene } 0}} \tanh(\beta)^{|E_0|}}_{\substack{\text{per ottenere una} \\ \text{stima su questo} \\ \text{serve un lemma.}}} \underbrace{\frac{\sum_{E' \in \mathcal{E}^{pari}_\Lambda : E' \subset \Delta(E_0)} \tanh(\beta)^{|E'|}}{\sum_{E \in \mathcal{E}^{pari}_\Lambda} \tanh(\beta)^{|E|}}}_{\leq 1}.$$

<u>Lemma:</u> Sia G un grafo connesso con N collegamenti. Da ogni punto di G, esiste una curva sui collegamenti attraversando ogni collegamento essattamente 2 volte.

<u>Dimostrazione:</u> Induzione in N. $\blacksquare$

Allora $\#\{\text{grafi } E_0 \text{ con } l \text{ segmenti}\}$

$$\leq \#\{\text{curve sul reticolo, con lunghezza } 2l \text{ iniziando in } 0\}.$$

Per ogni segmento che aggiungo tracciando ho al massimo $2d$ scelte:

$$\leq (2d)^{2l}.$$

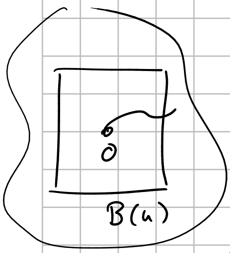
<u>Affermazione:</u> E_0 collega il punto 0 con $B(n)^c$.

Infatti: $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} I(i,E_0) = 2|E_0|$, pari.

Ma $I(0,E_0)$ è dispari.

Allora esiste $j\in\mathbb{Z}^d$, $j\neq 0$, tale che $I(j,E_0)$ è dispari.

Ma $E_0\in\mathcal{E}^0_{B(n)}$, allora solo possibile per $j\notin B(n)$.



Ma questa curva attraversa allora almeno n segmenti in E_0. $\Rightarrow |E_0|\geq n$.

Così otteniamo:

$$\langle\sigma_0\rangle^+_{\Lambda,\beta,0} \leq \sum_{\substack{E_0\in\mathcal{E}^0_\Lambda\\ E_0 \text{ connesso,}\\ \text{contiene } 0}} \tanh(\beta)^{|E_0|}$$

$\tanh(\beta)\leq\beta$

$$\leq \sum_{\ell\geq 1} \sum_{\substack{E_0\in\mathcal{E}^0_\Lambda\\ E_0 \text{ connesso}\\ E_0 \text{ contiene } 0\\ |E_0|=\ell}} \beta^\ell$$

$\#\{E_0\in\mathcal{E}^0_\Lambda : E_0$ connesso, contiene 0, $|E_0|=\ell\}$

$$\leq \begin{cases} 0 & \text{per } \ell<n \\ (2d)^{2\ell} & \text{per } \ell\geq n \end{cases}$$

$$\leq \sum_{\ell\geq n} (4d^2\beta)^\ell$$

per $\beta<\frac{1}{4d^2}$ questo è convergente,

e $\longrightarrow 0$ per $n\to\infty$.

Allora $\langle\sigma_0\rangle^+_{\beta,0} = 0$. $\blacksquare$