Lemma 15: (1) $h \longmapsto \langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,h}$ è non-decrescente, continua dalla destra.

(2) $\beta \longmapsto \langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,h}$, con $h \geq 0$ fisso, è non-decrescente.

Dimostrazione: (1) $\frac{\partial}{\partial h} \langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda,\beta,h} \geq 0$.

Sia $h_m \in \mathbb{R}$, tale che $h_m \longrightarrow h+$, e $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$.

Il corollario 8 implica che la doppia successione $(\langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h_m})_{n,m \geq 1}$ è non-decrescente e limitata.

Def.: $(a_{m,n})_{m,n \geq 1}$ è non-decrescente se $m \leq m', n \leq n' \Rightarrow a_{m,n} \leq a_{m',n'}$.

Ha un limite superiore se esiste $C < +\infty$ tale che $a_{m,n} \leq C \quad \forall m,n \in \mathbb{N}$.

Lemma: Sia $(a_{m,n})$ non-decrescente con un limite superiore. Allora $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{m,n}$

$$= \sup\{a_{m,n} : m,n \in \mathbb{N}\}$$
$$=: \lim_{m,n\to\infty} a_{m,n}.$$

Allora: $\lim_{m\to\infty} \langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,h_m} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h_m}$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h_m} = \lim_{n\to\infty} \langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h}$$
$$= \langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,h}.$$

(2) $\frac{\partial}{\partial \beta} \langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda,\beta,h} \geq 0$ con FKG. ∎

Secondo il Teorema 13, e la simmetria $\langle \sigma_0 \rangle^-_{\beta,0} = -\langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,0}$ implica che per $h=0$: unicità $\Leftrightarrow m^*(\beta) = 0$.

Inoltre, il lemma 15 implica che $\beta \mapsto m^*(\beta) = \langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,0}$ è non-decrescente. Allora il seguente è ben definito:

<u>Definizione:</u> La <u>temperatura inversa critica</u> è

$$\beta_c(d) := \inf\{\beta \geq 0 : m^*(\beta) > 0\}$$
$$= \sup\{\beta \geq 0 : m^*(\beta) = 0\}.$$

Rimane da vedere: $\beta_c(d) \neq 0$ e $\beta_c(d) \neq \infty$?

<u>Commento:</u> Usiamo l'invarianza translazionale

$$\langle \sigma_i \rangle^+_{\beta,0} = \langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,0} = m^*(\beta) \qquad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$$

FKG implica:

$$\langle \sigma_0 \sigma_i \rangle^+_{\beta,0} \geq \langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,0} \langle \sigma_i \rangle^+_{\beta,0} = m^*(\beta)^2.$$

In particolare, per $\beta > \beta_c$: $\inf_{i \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0 \sigma_i \rangle^+_{\beta,0} > 0$.

"<u>long range order</u>" / ordine a lunghe distanze.

Il teorema seguente dimostra che le definizioni (analitica e probabilistica) di transizione di fase sono equivalenti.

<u>Teorema 16:</u> $\forall \beta \geq 0$ e $\forall h \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial h^+}(\beta, h) = \lim_{t \to 0+} \frac{\psi(h+t) - \psi(h)}{t} = m^+(\beta, h)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial h^-}(\beta, h) = m^-(\beta, h).$$

In particolare $h \mapsto \psi(\beta, h)$ è derivabile in h se e solo se esiste un unico stato di Gibbs per (β, h).

<u>Dimostrazione:</u> Sia B_β l'insieme dei $h \in \mathbb{R}$ dove $h \mapsto \psi(\beta, h)$ non è derivabile. ψ è convessa rispetto h, allora B_β è numerabile.

Allora per ogni $h \in \mathbb{R}$ esiste una succesione $h_k \longrightarrow h+$ tale che $h_k \notin B_\beta$ (per nessun k).

Calcolate che per $h \notin B_\beta$: $m(\beta, h) = \frac{\partial \psi}{\partial h}(\beta, h)$.

Allora $\frac{\partial \psi}{\partial h+}(\beta,h) = \lim_{h_n \to h+} m(\beta,h_n) = \lim_{h_n\to h+} m^+(\beta,h_n)$
$= m^+(\beta,h)$.

Per simmetria: $\frac{\partial \psi}{\partial h-}(\beta,h) = -\frac{\partial \psi}{\partial h+}(\beta,-h) = -m^+(\beta,-h)$
$= m^-(\beta,h)$.

E unicità $\iff m^+(\beta,h) = m^-(\beta,h)$. ▨

4.6 Rottura di simmetria a temperatura bassa

Vogliamo dimostrare che $\beta_c(d) < +\infty$ per $d \geq 2$.
È sufficiente dimostrare che, uniformemente rispetto $|\Lambda|$, abbiamo
$$\mu^+_{\Lambda,\beta,0}(\sigma_0 = -1) \leq \delta(\beta)$$
per un $\delta(\beta) \to 0$ per $\beta \to \infty$.

Infatti:
$$\langle\sigma_0\rangle^+_{\Lambda,\beta,0} = \mu^+_{\Lambda,\beta,0}(\sigma_0 = +1) - \mu^+_{\Lambda,\beta,0}(\sigma_0=-1)$$
$$= 1 - 2\mu^+_{\Lambda,\beta,0}(\sigma_0=-1)$$
$$\geq 1 - 2\delta(\beta).$$

Prendo β fisso (suffic. grande tale che $1-2\delta(\beta)>0$) e poi $\Lambda \Uparrow \mathbb{Z}^d$, si ottiene:
$$m^*(\beta) = \langle\sigma_0\rangle^+_{\beta,0} > 0.$$

Lo sviluppo per bassa temperatura

Consideriamo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ $(d=2)$, Λ compatto, $h=0$, $\eta = +$. Fissiamo un $\omega \in \Omega^+_\Lambda$.
$$\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,0} = -\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Lambda} \sigma_i\sigma_j \quad \beta$$

$$= \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Lambda} \underbrace{\beta(1-\sigma_i\sigma_j)}_{\text{solo questa dipende da } \omega} - \beta\,|\mathcal{E}^b_\Lambda| .$$

$$\sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Lambda} \beta(1-\sigma_i\sigma_j) = \sum_{\substack{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Lambda \\ \sigma_i\neq\sigma_j}} 2\beta = 2\beta\,\big|\{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_\Lambda : \sigma_i\neq\sigma_j\}\big| .$$

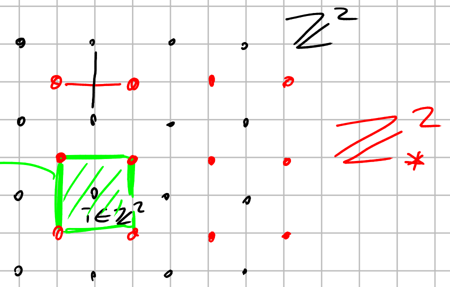
Con $i\in\mathbb{Z}^2$ viene associato il cubo

$$\mathcal{S}_i := i + \left[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right]^2 \quad \text{centrato in } i.$$

La frontiera di $\mathcal{S}_i\subset\mathbb{R}^2$ contiene 4 segmenti.

Il reticolo duale:

$$\mathbb{Z}^2_* := \mathbb{Z}^2 + \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)$$

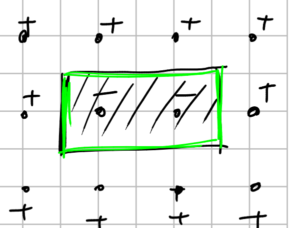


Ogni segmento del $\mathbb{Z}^2$ ha intersezione con esattamente un segmento del $\mathbb{Z}^2_*$. Diciamo per $e\in\mathbb{Z}^2$, lo chiamiamo $e_\perp$.

Dato $\omega\in\Omega^+_\Lambda$ definiamo l'insieme

$$\mathcal{M}(\omega) := \bigcup_{\substack{i\in\Lambda \\ \sigma_i(\omega)=-1}} \mathcal{S}_i .$$

Anche $\partial\mathcal{M}(\omega)$ è costituito da segmenti collegando punti vicini di $\mathbb{Z}^2_*$.



Ogni segmento

$$e_\perp = \{i,j\}_\perp \subset \partial\mathcal{M}(\omega)$$

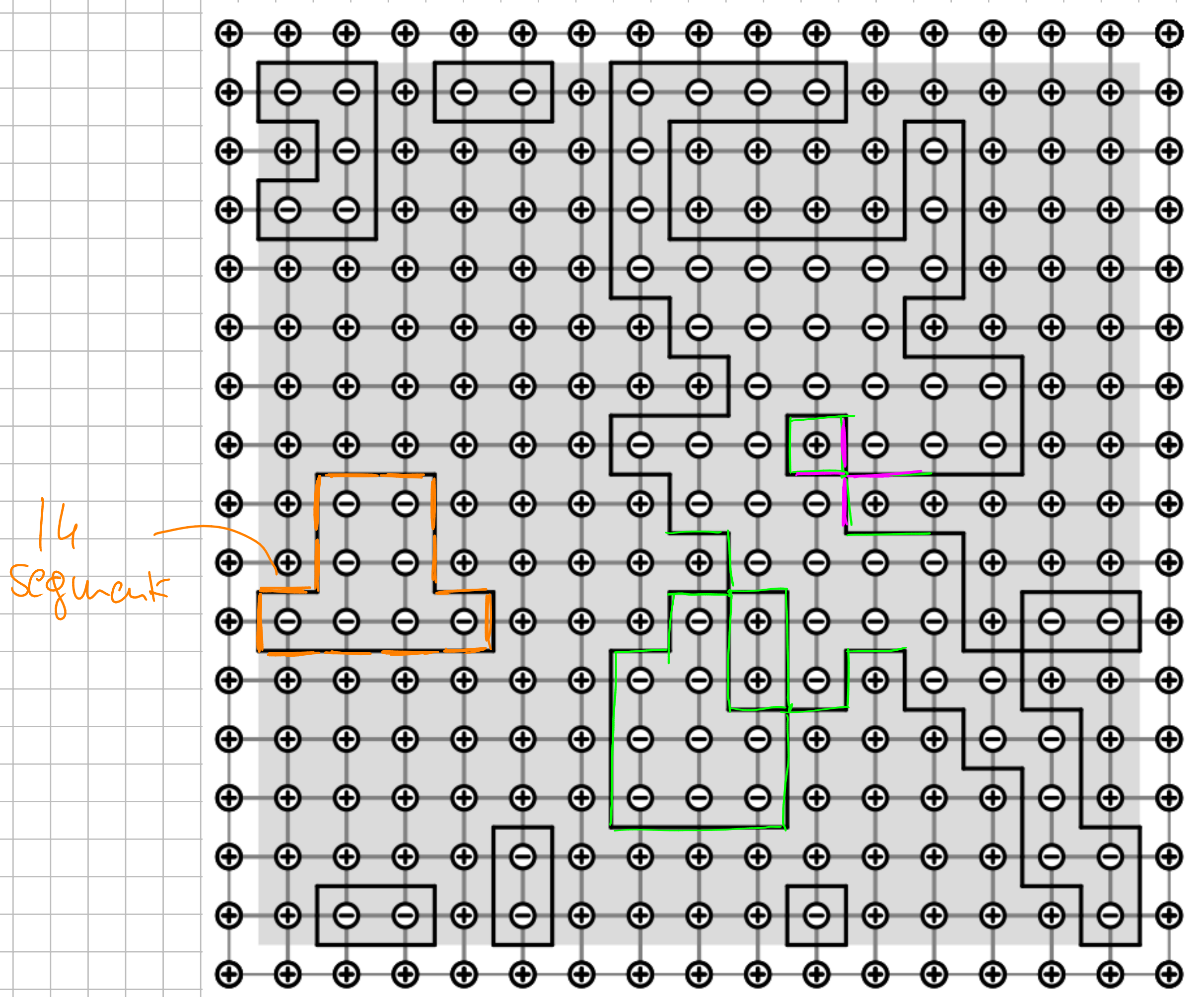
sta separando due spin con orientamento opposto: $\sigma_i(\omega)\neq\sigma_j(\omega)$.

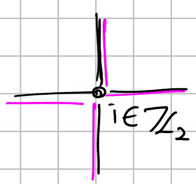
Così otteniamo

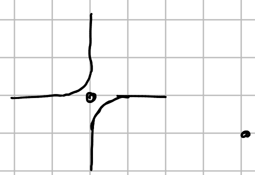
numero di segmenti = lunghezza

numero di elementi

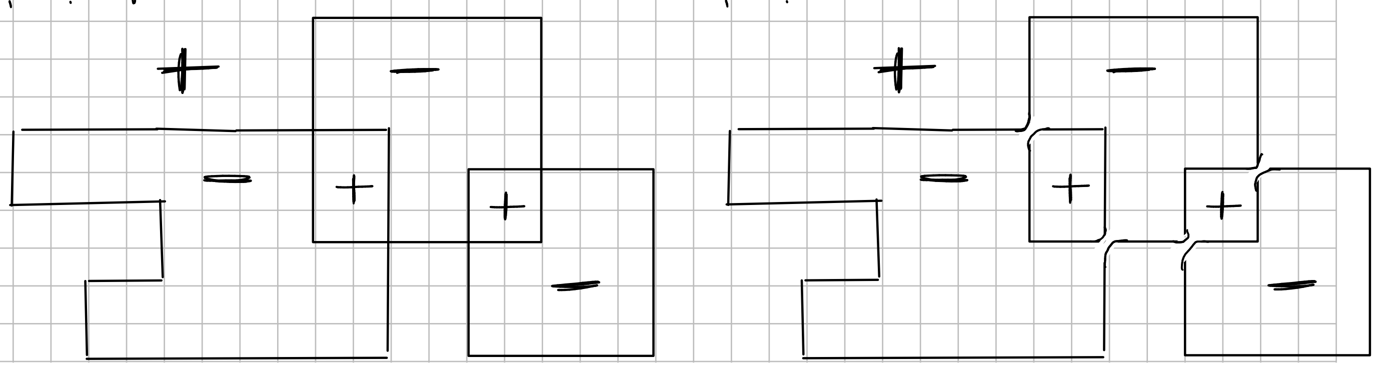
$$\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,0}(\omega) = 2\beta|\partial\mathcal{M}(\omega)| - \beta|\mathcal{E}^b_\Lambda|.$$



Per il caso 

definiamo una regola come separare le curve:  .

Esempio:



una collezione di curve semplici

Così $\partial M(\omega)$ diventa un insieme di curve semplici senza intersezioni: $\partial M(\omega) = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$.

Ogni curva γ_i viene chiamato un profilo di ω.

Sia $\Gamma(\omega) := \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, e la lunghezza $|\gamma|$ di $\gamma \in \Gamma(\omega)$ il numero di segmenti del reticolo duale su γ.

Così, per ogni $\omega \in \Omega^+_\Lambda$ si può scrivere

$$\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,0}(\omega) = -\beta |\mathcal{E}^b_\Lambda| + 2\beta \sum_{\gamma \in \Gamma(\omega)} |\gamma| .$$

La funzione di partizione diventa

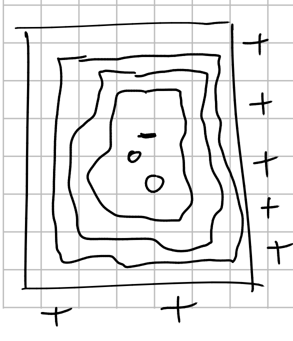
$$Z^+_{\Lambda,\beta,0} = e^{\beta |\mathcal{E}^b_\Lambda|} \sum_{\omega \in \Omega^+_\Lambda} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta|\gamma|}$$

(il prodotto è $= 1$ se $\Gamma(\omega) = \emptyset$).

La probabilità della configurazione $\omega \in \Omega^+_\Lambda$:

$$\mu^+_{\Lambda,\beta,0}(\omega) = \frac{\exp(-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,0}(\omega))}{Z^+_{\Lambda,\beta,0}} = \frac{\cancel{e^{\beta|\mathcal{E}^b_\Lambda|}} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta|\gamma|}}{\cancel{e^{\beta|\mathcal{E}^b_\Lambda|}} \sum_{\omega \in \Omega^+_\Lambda} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta|\gamma|}} .$$

Per studiare $\mu^+_{\Lambda,\beta,0}(\sigma_0 = -1)$ usiamo l'argomento di Peierls: prendiamo $\Lambda_n := B(n) := \{-n, \dots, n\}^2 \subset \mathbb{Z}^2$.



Avendo + ai margini, per avere $\sigma_0(\omega) = -1$ nella configurazione $\omega \in \Omega^+_{B(n)}$, ci serve un numero dispari (almeno 1) di profili che contengono $i = 0$.

Per ogni $\gamma \in \Gamma(\omega)$ scriviamo $\mathrm{Int}(\gamma)$ per la regione limitata circondata da γ.

(Teorema della curva di Jordan.)

Così otteniamo:

$$\mu^{+}_{B(n),\beta,0}(\sigma_0 = -1) \leq \mu^{+}_{B(n),\beta,0}(\exists \text{ profilo } \gamma_* : 0 \in \mathrm{Int}(\gamma_*))$$

$$= \mu^{+}_{B(n),\beta,0}(\exists\, \gamma_* \in \Gamma : 0 \in \mathrm{Int}(\gamma_*))$$

$$\leq \sum_{\substack{\gamma_* \text{ è un} \\ \text{profilo:} \\ 0 \in \mathrm{Int}(\gamma_*)}} \mu^{+}_{B(n),\beta,0}(\gamma_* \in \Gamma)$$

Γ è una funzione di ω.

<u>Lemma 17:</u> Per ogni $\beta > 0$ e per ogni profilo γ_*:

$$\mu^{+}_{B(n),\beta,0}(\Gamma \ni \gamma_*) \leq e^{-2\beta|\gamma_*|}.$$