Teorema 4: Esistono $\lim_{n\to\infty} \langle \cdot \rangle^{\pm}_{\Lambda_n,\beta,h} = \langle \cdot \rangle^{\pm}_{\beta,h}$, non dipendono da $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ed hanno l'invarianza traslazionale.

<u>Dimostrazione:</u> (per $\eta = +$)

<u>Esistenza:</u> Sia f locale. Per linearità

$$\langle f \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} = \sum_{A\subset \mathrm{supp}(f)} \hat{f}_A \langle n_A \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h}.$$

Corollario 9 implica $\langle n_A \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} \geq \langle n_A \rangle^{+}_{\Lambda_{n+1},\beta,h}$.
Allora il limite esiste.

<u>Indipendenza da Λ_n:</u> Consideriamo $\Lambda^1_n \uparrow \mathbb{Z}^d$, e $\Lambda^2_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ $\left(\Lambda^i_{k+1} \supset \Lambda^i_k, \bigcup_{k\geq 1} \Lambda^i_k = \mathbb{Z}^d\right)$.
Otteniamo i limiti $\langle \cdot \rangle^{+,1}_{\beta,h}$, $\langle \cdot \rangle^{+,2}_{\beta,h}$.
Alternando tra una sotto-successione di Λ^1_n e una sotto-successione di Λ^2_n si trova una successione Δ_n tale che gli elementi dispari vengono da Λ^1_n, e gli elementi pari da Λ^2_n, e inoltre $\Delta_{k+1} \supsetneq \Delta_k$.
In particolare $\Delta_n \uparrow \mathbb{Z}^d$.
Il limite seguendo Δ_n esiste per lo stesso argomento, ed essendo sottosuccessioni:

$$\lim_{n\to\infty} \langle f \rangle^{+}_{\Lambda^1_n,\beta,h} = \lim_{n\to\infty} \langle f \rangle^{+}_{\Delta_n,\beta,h} = \lim_{n\to\infty} \langle f \rangle^{+}_{\Lambda^2_n,\beta,h}.$$

<u>Invarianza traslazionale:</u> Sia f locale, $j \in \mathbb{Z}^d$, allora anche $f\circ\theta_j$ è locale.

$$\theta_{-j}\Lambda_n = (\Lambda_n + j) \uparrow \mathbb{Z}^d \quad (n\to\infty).$$

Allora:

$$\begin{array}{ccc} \langle f \rangle^{+}_{\Lambda_n,\beta,h} & \longrightarrow & \langle f \rangle^{+}_{\beta,h} \\ \| & & \\ \langle f\circ\theta_j \rangle^{+}_{\theta_{-j}\Lambda_n,\beta,h} & \longrightarrow & \langle f\circ\theta_j \rangle^{+}_{\beta,h}. \end{array}$$

(Il limite non dipende dalla successione.) ▨

(Argomento standard: unicità $\Rightarrow$ simmetria.)

4.4 Il diagramma di fase

Abbiamo costruito gli stati di Gibbs. Rimane da capire per quale (β, h) abbiamo $\langle \cdot \rangle^+_{\beta,h} \neq \langle \cdot \rangle^-_{\beta,h}$.

<u>Definizione:</u> Se esistono almeno due stati di Gibbs diversi per (β, h) si dice che c'è una <u>transizione di fase</u> per (β, h).

<u>Commento:</u> Più avanti vedremo che questa definizione "probabilistica" è equivalente a quella "analitica" del 24/5.

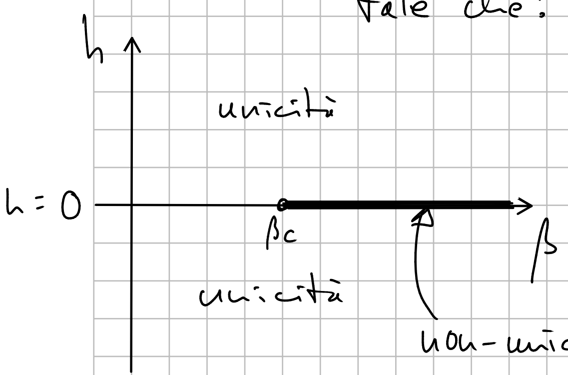
<u>Teorema 12:</u> (risultato principale)

(1) Per ogni $d \geq 1$, se $h \neq 0$, esiste solo uno stato di Gibbs per ogni $\beta \in \mathbb{R}$.

(2) Per $d = 1$ esiste solo uno stato di Gibbs $\forall \beta \in [0, \infty)$ e $\forall h \in \mathbb{R}$.

(3) Se $h = 0$ e $d \geq 2$: esiste $\beta_c = \beta_c(d) \in (0, \infty)$ tale che:
- $\beta < \beta_c \Rightarrow$ esiste solo uno stato di Gibbs per $(\beta, 0)$
- $\beta > \beta_c \Rightarrow \langle \cdot \rangle^+_{\beta,h} \neq \langle \cdot \rangle^-_{\beta,h}$.

(Non è detto che ci sono solo due stati di Gibbs.)



<u>Piano per la dimostrazione:</u>

(3) 4.5 criteri per (non-)unicità

4.6 rottura di simmetria $\beta > \beta_c$, l'argomento di Peierls

4.7 unicità per $\beta < \beta_c$, sviluppo di alta temperatura

(2) $d = 1$: già fatto.

[(1) 4.8 unicità per $\beta < \beta_c$, se $h \neq 0$.] ?

4.5 Criteri per non-unicità

Teorema 13: Sia $\beta \geq 0$, $h \in \mathbb{R}$. I seguenti sono equivalenti:

(i) $\exists!$ stato di Gibbs per (β, h)

(ii) $\langle \cdot \rangle^+_{\beta,h} = \langle \cdot \rangle^-_{\beta,h}$

(iii) $\langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,h} = \langle \sigma_0 \rangle^-_{\beta,h}$

Dimostrazione: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) banale.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Secondo Lemma 11: $\forall \eta$:

$$\langle n_A \rangle^-_{\beta,h} \leq \langle n_A \rangle^\eta_{\beta,h} \leq \langle n_A \rangle^+_{\beta,h}.$$

Per lemma 5 vale per ogni f locale, allora (i).

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sia $A \subset \mathbb{Z}^d$ compatto, $\Lambda_k \uparrow \mathbb{Z}^d$.

La funzione $\sum_{i \in A} n_i - n_A$ è non-decrescente (da controllare!). Allora Lemma 11 implica che:

$$\langle \sum_{i\in A} n_i - n_A \rangle^-_{\Lambda_k,\beta,h} \leq \langle \sum_{i \in A} n_i - n_A \rangle^+_{\Lambda_k,\beta,h}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Prendendo $\Lambda_k \uparrow \mathbb{Z}^d$:

$$\langle n_A \rangle^+_{\beta,h} - \langle n_A \rangle^-_{\beta,h} \leq \sum_{i \in A} \underbrace{\left(\langle n_i \rangle^+_{\beta,h} - \langle n_i \rangle^-_{\beta,h} \right)}$$

invarianza translaz.

$$= \langle n_0 \rangle^+_{\beta,h} - \langle n_0 \rangle^-_{\beta,h}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,h} - \langle \sigma_0 \rangle^-_{\beta,h} \right)$$

$$= 0 \quad \text{(iii)}.$$

$$\Rightarrow \langle n_A \rangle^+_{\beta,h} \leq \langle n_A \rangle^-_{\beta,h}$$

Ma per lemma 11: $\langle n_A \rangle^-_{\beta,h} \leq \langle n_A \rangle^+_{\beta,h}$.

$\Rightarrow \langle f \rangle^-_{\beta,h} = \langle f \rangle^+_{\beta,h}$ per ogni f locale. $\blacksquare$

Ricordiamo che

$$m^\eta_\Lambda(\beta,h) = \langle m_\Lambda \rangle^\eta_{\Lambda,\beta,h} \quad \text{dove} \quad m_\Lambda = \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i\in\Lambda} \sigma_i .$$

<u>Lemma 14:</u> Per ogni $\Lambda \Uparrow \mathbb{Z}^d$, i limiti

$$m^+(\beta,h) = \lim_{\Lambda \Uparrow \mathbb{Z}^d} m^+_\Lambda(\beta,h), \quad m^-(\beta,h) := \lim_{\Lambda\Uparrow\mathbb{Z}^d} m^-_\Lambda(\beta,h)$$

esistono e

$$m^+(\beta,h) = \langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,h}, \quad m^-(\beta,h) = \langle \sigma_0\rangle^-_{\beta,h}.$$

$h \mapsto m^+(\beta,h)$ è continua dalla destra, e $h\mapsto m^-(\beta,h)$ è continua dalla sinistra.

Inoltre la magnetizzazione spontanea è

$$m^*(\beta) = \lim_{h\to 0+} m(\beta,h) = \lim_{h\to 0+} m^+(\beta,h)$$

$$= m^+(\beta,0) = \langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,0}.$$

<u>Dimostrazione:</u> l'invarianza translazionale dello stato in volume infinito

$$\langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,h} = \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{i\in\Lambda_n} \langle \sigma_i \rangle^+_{\beta,h} = \langle m_{\Lambda_n} \rangle^+_{\beta,h}$$

monotonia rispetto Λ (corollario 9)

$$\leq \langle m_{\Lambda_n} \rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h}.$$

Allora $\langle \sigma_0 \rangle^+_{\beta,h} \leq \liminf_{n\to\infty} \langle m_{\Lambda_n} \rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h}$.

Adesso la disequazione per il limsup:

Sia $k\geq 1$ e $i\in\Lambda_n$. Sia $B(k) := \{-k,-k+1,\dots,k-1,k\}^d$.

Prima possibilità: $i + B(k) \subset \Lambda_n$. Allora usando la monotonia rispetto l'insieme Λ (corollario 9) e otteniamo:

$$\langle \sigma_i \rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h} \leq \langle \sigma_i \rangle^+_{i+B(k),\beta,h} = \langle \sigma_0 \rangle^+_{B(k),\beta,h}.$$

Seconda possibilità: $i + B(k) \not\subset \Lambda_n$. Allora il cubo $i+B(k)$ ha un'intersezione non vuota con $\partial^{in}\Lambda_n$. (per n sufficientemente grande).

$$\langle m_{\Lambda_n}\rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h} = \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\substack{i\in\Lambda_n:\\ i+B(k)\subset\Lambda_n}}\langle\sigma_i\rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h} + \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{\substack{i\in\Lambda_n\\ i+B(k)\not\subset\Lambda_n}}\langle\sigma_i\rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h}$$

$$\leq \langle\sigma_0\rangle^+_{B(k),\beta,h} + 2\,\frac{|B(k)|\,|\partial^{in}\Lambda_n|}{|\Lambda_n|}$$

avendo usato che $\langle\sigma_i\rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h}$ è limitato perché $\sigma_i=\pm 1$.

Ricordiamo che $\Lambda_n\Uparrow\mathbb{Z}^d$ implica $|\partial^{in}\Lambda_n|/|\Lambda_n|\longrightarrow 0$.

Allora $\limsup_n \langle m_{\Lambda_n}\rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h}\leq\langle\sigma_0\rangle^+_{B(k),\beta,h}$.

Con $\lim_{k\to\infty}\langle\sigma_0\rangle^+_{B(k),\beta,h} = \langle\sigma_0\rangle^+_{\beta,h}$ si ottiene

$$m^+(\beta,h) = \langle\sigma_0\rangle^+_{\beta,h} = \lim_{\Lambda\Uparrow\mathbb{Z}^d} m^+_\Lambda(\beta,h)$$
$$= \lim_{\Lambda\Uparrow\mathbb{Z}^d}\langle m_\Lambda\rangle^+_{\Lambda,\beta,h}.$$

La continuità dalla destra / sinistra si ottiene dal prossimo lemma (lemma 15). ▨

<u>Lemma 15:</u> [proprietà di $\langle\sigma_0\rangle^+_{\beta,h}$]

(i) Per ogni $\beta\geq 0$: $h\longmapsto\langle\sigma_0\rangle^+_{\beta,h}$ è non-decrescente e continua dalla destra.

Per ogni $\beta\geq 0$: $h\longmapsto\langle\sigma_0\rangle^-_{\beta,h}$ è non-decrescente e continua dalla sinistra.

(ii) Per ogni $h\geq 0$: $\beta\longmapsto\langle\sigma_0\rangle^+_{\beta,h}$ è non-decrescente.

Per ogni $h\leq 0$: $\beta\longmapsto\langle\sigma_0\rangle^-_{\beta,h}$ è non-crescente.

<u>Dimostrazione:</u> (Dimostrazione qua solo per il caso positivo, l'altro caso segue usando la $\mathbb{Z}_2$-simmetria.)

(i) Sia $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ compatto. Calcolando (esercizio!) la derivata rispetto il campo magnetico esterno si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial h} \langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda,\beta,h} = \sum_{i \in \Lambda} \left(\langle \sigma_0 \sigma_i \rangle^+_{\Lambda,\beta,h} - \langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda,\beta,h} \langle \sigma_i \rangle^+_{\Lambda,\beta,h} \right)$$

$$\geq 0 \quad \text{(la disequazione FKG).}$$

Per Λ fisso, $h \longmapsto \langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda,\beta,h}$ è non-decrescente. Sicuramente anche il limite $\lim_{\Lambda \to \infty} \langle \sigma_0 \rangle^+_{\Lambda,\beta,h}$ rimane non-decrescente rispetto h.

$\longrightarrow$ continua domani.