Definizione: Definiamo una relazione d'ordine (parziale) su Ω tramite $\underline{\omega \le \omega'}$ se e solo se $\omega_i \le \omega_i'$ $\forall i \in \mathbb{Z}^d$.

Un evento (un sottoinsieme) $E \subset \Omega$ viene chiamato **crescente** se: $\omega \in E \wedge \omega' \ge \omega \Rightarrow \omega' \in E$.

Idea (FKG): Se E ed F sono eventi crescenti, sembra ragionevole

$$\mu^{+}_{\Lambda,\beta,h}(E \mid F) \ge \mu^{+}_{\Lambda,\beta,h}(E)$$

$$\Leftrightarrow \mu^{+}_{\Lambda,\beta,h}(E \cap F) \ge \mu^{+}_{\Lambda,\beta,h}(F)\, \mu^{+}_{\Lambda,\beta,h}(E).$$

Definizione: $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ è **non-decrescente** se e solo se: $\omega' \ge \omega \Rightarrow f(\omega') \ge f(\omega)$.

Teorema 7 (Fortuin–Kasteleyn–Ginibre)

Sia $\underline{J} \ge 0$ se $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$. Per ogni coppia di funzioni non-decrescenti f, g:

$$\langle f g \rangle^{\eta}_{\Lambda,\underline{J},\underline{h}} \ge \langle f \rangle^{\eta}_{\Lambda,\underline{J},\underline{h}} \langle g \rangle^{\eta}_{\Lambda,\underline{J},\underline{h}}.$$

Commento: È permesso anche $\underline{h} \ne 0$, e ogni η.

Notazione: Per $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \wedge b := \min(a,b)$$
$$a \vee b := \max(a,b).$$

Per $\omega = (\omega_i)_{i\in\Lambda}$, $\omega' = (\omega_i')_{i\in\Lambda}$:

$$\omega \wedge \omega' := (\omega_i \wedge \omega_i')_{i\in\Lambda}, \quad \omega \vee \omega' := (\omega_i \vee \omega_i')_{i\in\Lambda}.$$

Proposizione 8: Sia $\mu := \bigotimes_{i\in\Lambda} \mu_i$ una qualsiasi misura prodotto su Ω_Λ. Siano $f_1, f_2, f_3, f_4 : \Omega_\Lambda \longrightarrow [0,\infty)$ tale che

$$f_1(\omega) f_2(\omega') \le f_3(\omega \wedge \omega') f_4(\omega \vee \omega') \quad \forall \omega, \omega' \in \Omega_\Lambda.$$

Allora

$$\langle f_1 \rangle_\mu \langle f_2 \rangle_\mu \le \langle f_3 \rangle_\mu \langle f_4 \rangle_\mu.$$

Dimostrazione: (Prop. 8 $\Rightarrow$ Thm. 7)

È sufficiente guardare $\mathrm{supp}(f), \mathrm{supp}(g) \subset \Lambda$, ed è anche sufficiente guardare $f \geq 0$, $g \geq 0$.

(Se f, g non sono così: ri-definiamo $f(\omega)$ come $f(\tilde{\omega}) - \min_{\omega'} f(\tilde{\omega}')$ con $\tilde{\omega}$ tale che $\tilde{\omega}\restriction_\Lambda = \omega$, $\tilde{\omega}\restriction_{\Lambda^c} = \eta$.) ((Controllate!))

Per $i \in \Lambda$ e $s \in \{\pm 1\}$ definiamo:

$$\mu_i(s) := \exp\Big(sh + s\sum_{j\notin\Lambda, |j-i|=1} J_{ij}\,\eta_j\Big).$$

Allora $\mu = \bigotimes_{i\in\Lambda} \mu_i$ è tutta la parte della misura canonica senza l'interazione.

L'interazione è: $$p(\omega) := \frac{1}{Z^\eta_{\Lambda,J,\underline{h}}} \exp\Big(\sum_{\{i,j\}\in E_\Lambda} J_{ij}\,\omega_i\omega_j\Big)$$

e allora

$$\langle fp\rangle_\mu = \sum_{\omega\in\Omega_\Lambda} f(\omega) \underbrace{p(\omega)\,\mu(\omega)}_{\mu^\eta_{\Lambda,J,\underline{h}}(\omega)} = \langle f\rangle^\eta_{\Lambda,J,\underline{h}}.$$

Secondo il teorema:

$$\begin{array}{ccccc} \langle pf\rangle_\mu & \langle pg\rangle_\mu & \leq & \langle p\rangle_\mu & \langle pfg\rangle_\mu \\ \| & \| & & \| & \| \\ \langle f\rangle^\eta_{\Lambda,J,\underline{h}} & \langle g\rangle^\eta_{\Lambda,J,\underline{h}} & & \langle 1\rangle^\eta_{\Lambda,J,\underline{h}} & \langle fg\rangle^\eta_{\Lambda,J,\underline{h}}. \\ & & & \| & \\ & & & 1 & \end{array}$$

Per controllare l'ipotesi:

$$\begin{array}{ccc} pf(\omega)\,pg(\omega') & \leq & p(\omega\wedge\omega')\,pfg(\omega\vee\omega') \\ \| & & \| \\ p(\omega)f(\omega)\,p(\omega')g(\omega') & & p(\omega\wedge\omega')\,p(\omega\vee\omega')\,f(\omega\vee\omega') \\ & & \times\, g(\omega\vee\omega'). \end{array}$$

Ovviamente $\omega\vee\omega' \geq \omega$, $\omega\vee\omega' \geq \omega'$.

Allora $f(\omega\vee\omega') \geq f(\omega)$, $g(\omega\vee\omega') \geq g(\omega')$.

Rimane da controllare:
$$p(\omega)\,p(\omega') \leq p(\omega\wedge\omega')\,p(\omega\vee\omega') \;?$$
p è un esponenziale; è sufficiente allora
$$\omega_i\,\omega_j + \omega_i'\omega_j' \leq (\omega_i \vee \omega_i')(\omega_j \vee \omega_j') + (\omega_i \wedge \omega_i')(\omega_j \wedge \omega_j').$$
16 possibilità. Simmetrico per $\omega \leftrightarrow \omega'$, allora 8. Simmetrico anche risp. $i \leftrightarrow j$, allora 4 possibilità da controllare. $\blacksquare$

Dimostrazione (Prop. 8):

Per $i \in \Lambda$, scriviamo $\omega \in \Omega_\Lambda$ come $(\hat{\omega}, \omega_i)$, dove $\hat{\omega} \in \Omega_{\Lambda\setminus\{i\}}$ e $\omega_i \in \{\pm 1\}$.

Dimostriamo che
$$(*)\quad f_1(\omega)\,f_2(\omega') \leq f_3(\omega\wedge\omega')\,f_4(\omega\vee\omega') \implies \hat{f}_1(\hat{\omega})\,\hat{f}_2(\omega') \leq \hat{f}_3(\hat{\omega}\wedge\hat{\omega}')\,\hat{f}_4(\hat{\omega}\vee\hat{\omega}')$$
dove $\hat{f}_k$ è ottenuto integrando la variabile ω_i:
$$\hat{f}_k(\hat{\omega}) := \langle f_k(\hat{\omega}, \cdot)\rangle_{\mu_i} = \sum_{\nu=\pm1} f_k(\hat{\omega}, \nu)\,\mu_i(\nu).$$
Usando questo $|\Lambda|$ volte abbiamo dimostrato il teorema.

Per dimostrare $(*)$:

Lato destro: $\hat{f}_3(\hat{\omega}\wedge\hat{\omega}')\,\hat{f}_4(\hat{\omega}\vee\hat{\omega}')$
$$= \langle f_3(\hat{\omega}\wedge\hat{\omega}', u)\rangle_{\mu_i(du)}\,\langle f_4(\hat{\omega}\vee\hat{\omega}', v)\rangle_{\mu_i(dv)}$$
$$= \langle f_3(\hat{\omega}\wedge\hat{\omega}', u)\,f_4(\hat{\omega}\vee\hat{\omega}', v)\rangle_{\mu_i\otimes\mu_i(du\,dv)}$$
$$= \langle \mathbb{1}_{\{u=v\}}\,f_3(\hat{\omega}\wedge\hat{\omega}', u)\,f_4(\hat{\omega}\vee\hat{\omega}', v)\rangle_{\mu_i\otimes\mu_i(du\,dv)}$$
$$+ \langle \mathbb{1}_{\{u<v\}}\cdot\big(f_3(\hat{\omega}\wedge\hat{\omega}', u)\,f_4(\hat{\omega}\vee\hat{\omega}', v) + f_3(\hat{\omega}\wedge\hat{\omega}', v)\,f_4(\hat{\omega}\vee\hat{\omega}', u)\big)\rangle_{\mu_i\otimes\mu_i(du\,dv)}$$

Lato sinistro:

$$\hat f_1(\tilde\omega)\hat f_2(\hat\omega') = \langle f_1(\hat\omega,u)\rangle_{\mu_i(du)}\ \langle f_2(\tilde\omega',v)\rangle_{\mu_i(dv)}$$

$$= \langle 1\!\!1_{\{u=v\}} f_1(\hat\omega,u) f_2(\tilde\omega',v)\rangle_{\mu_i\otimes\mu_i(du\,dv)}$$

$$+ \langle 1\!\!1_{\{u<v\}}\big(f_1(\hat\omega,u) f_2(\hat\omega',v) + f_1(\hat\omega,v) f_2(\tilde\omega',u)\big)\rangle_{\mu_i\otimes\mu_i(du\,dv)}$$

Così $\hat f_3(\tilde\omega\wedge\tilde\omega') f_4(\tilde\omega\vee\tilde\omega') - \hat f_1(\hat\omega)\hat f_2(\tilde\omega')$

(i) $= \langle 1\!\!1_{\{u=v\}}\cdot\big(f_3(\tilde\omega\wedge\tilde\omega',u) f_4(\tilde\omega\vee\tilde\omega',v) - f_1(\hat\omega,u) f_2(\hat\omega',v)\big)\rangle_{\mu_i\otimes\mu_i(du\,dv)}$

(ii) $+ \langle 1\!\!1_{\{u<v\}}\cdot\big(C_{uv} + C_{vu} - A_{uv} - A_{vu}\big)\rangle_{\mu_i\otimes\mu_i(du\,dv)}$

con

$$C_{uv} = f_3(\tilde\omega\wedge\tilde\omega',u) f_4(\tilde\omega\vee\tilde\omega',v)$$
$$A_{uv} = f_1(\tilde\omega,u) f_2(\tilde\omega',v).$$

(i) ≥ 0 grazie all'ipotesi.

(ii): Rimane da dimostrare: $A_{uv} + A_{vu} \leq C_{uv} + C_{vu}$.

- $A_{uv} \leq C_{uv}$: $f_1(\hat\omega,u) f_2(\hat\omega',v) \leq f_3(\tilde\omega\wedge\hat\omega',u) f_4(\hat\omega\vee\hat\omega',v)$

  $\overset{u<v}{=} f_3(\hat\omega\wedge\hat\omega',u\wedge v) f_4(\tilde\omega\vee\hat\omega',u\vee v)$

  che è l'ipotesi

- $A_{vu} \leq C_{uv}$: $f_1(\hat\omega,v) f_2(\tilde\omega',u) \leq f_3(\hat\omega\wedge\hat\omega',u) f_4(\hat\omega\vee\hat\omega',v)$

  $\overset{u<v}{=} f_3(\tilde\omega\wedge\tilde\omega',u\wedge v) f_4(\tilde\omega\vee\tilde\omega',u\vee v)$

  vero perché $u\vee v = v\vee u$
  $u\wedge v = v\wedge u$.

- $A_{uv}A_{vu} \leq C_{uv}C_{vu}$: $A_{uv}A_{vu} = f_1(\hat\omega,u) f_2(\tilde\omega',v) f_1(\tilde\omega,v) f_2(\hat\omega',u)$

  $= \underbrace{f_1(\hat\omega,u) f_2(\tilde\omega',u)} f_1(\tilde\omega,v) f_2(\tilde\omega',v)$

  l'ipotesi $\leq f_3(\tilde\omega\wedge\hat\omega',u) f_4(\hat\omega\vee\hat\omega',u)$

  $\times f_3(\hat\omega\wedge\hat\omega',v) f_4(\hat\omega\vee\tilde\omega',v)$

  $= C_{uv}C_{vu}.$

Allora: $A_{uv} \le C_{uv}$, $A_{vu} \le C_{uv}$, $A_{uv}A_{vu} \le C_{uv}C_{vu}$.

Da dimostrare: $A_{uv} + A_{vu} \le C_{uv} + C_{vu}$.

Se $C_{uv} = 0$: banale.

Se $C_{uv} \neq 0$: $0 \le \left(1 - \frac{A_{uv}}{C_{uv}}\right)\left(1 - \frac{A_{vu}}{C_{uv}}\right) = 1 + \frac{A_{uv}A_{vu}}{C_{uv}^2} - \frac{A_{uv}+A_{vu}}{C_{uv}}$

$$\le 1 + \frac{\cancel{C_{uv}}\,C_{vu}}{\cancel{C_{uv}}\,C_{uv}} - \frac{A_{uv}+A_{vu}}{C_{uv}}$$

$$= \frac{1}{C_{uv}}\left(C_{uv} + C_{vu} - A_{uv} - A_{vu}\right). \quad \blacksquare$$

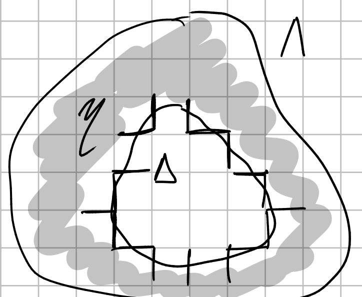
Corollario 9: [monotonia rispetto Λ]

Sia f non-decrescente e $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^d$ compatti.
Allora per ogni $\beta \ge 0$ e $h \in \mathbb{R}$: $\langle f \rangle^+_{\Lambda_1,\beta,h} \ge \langle f \rangle^+_{\Lambda_2,\beta,h}$.

Dimostrazione:

Primo passo: per $\Delta \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\eta \in \Omega$, $\omega' \in \Omega^\eta_\Lambda$:

$$\mu^\eta_{\Lambda,\beta,h}(\cdot \mid \sigma_i = \omega'_i \ \forall i \in \Lambda \setminus \Delta) = \mu^{\omega'}_{\Delta,\beta,h}(\cdot).$$



Dimostratelo!

Con $\eta = \omega' = (+1)$ dappertutto, otteniamo

$$\langle f \rangle^+_{\Lambda_1,\beta,h} = \langle f \mid \sigma_i = +1 \ \forall i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1 \rangle^+_{\Lambda_2,\beta,h}.$$

Usando che $1\!\!1_{\{\sigma_i = 1 \ \forall i \in \Lambda_2 \setminus \Lambda_1\}}$ è non-decrescente, otteniamo da FKG:

$$\langle f \rangle^+_{\Lambda_1,\beta,h} = \frac{\langle f \, 1\!\!1_{\{\sigma_i = 1 \ \forall i \in \Lambda_2\setminus\Lambda_1\}} \rangle^+_{\Lambda_2,\beta,h}}{\langle 1\!\!1_{\{\sigma_i = 1 \ \forall i \in \Lambda_2\setminus\Lambda_1\}} \rangle^+_{\Lambda_2,\beta,h}}$$

$$\ge \frac{\langle f \rangle^+_{\Lambda_2,\beta,h} \, \cancel{\langle 1\!\!1_{\{\sigma_i = 1 \ \forall i \in \Lambda_2\setminus\Lambda_1\}} \rangle^+_{\Lambda_2,\beta,h}}}{\cancel{\langle 1\!\!1_{\{\sigma_i = 1 \ \forall i \in \Lambda_2\setminus\Lambda_1\}} \rangle^+_{\Lambda_2,\beta,h}}} = \langle f \rangle^+_{\Lambda_2,\beta,h}. \quad \blacksquare$$

Lemma 11: Sia f non-decrescente, allora per ogni $\beta \ge 0$, $h \in \mathbb{R}$:

$$\langle f \rangle^-_{\Lambda,\beta,h} \le \langle f \rangle^\eta_{\Lambda,\beta,h} \le \langle f \rangle^+_{\Lambda,\beta,h}$$

per ogni condizione al contorno η, ed ogni $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ completo.

Se f è locale e $\mathrm{supp}(f) \subset \Lambda$ lo stesso vale per $\eta = \emptyset$.

Se $\Lambda_n = \{0, 1, \dots n-1\}^d$, vale anche per $\eta =$ "periodiche".

<u>Dimostrazione:</u>

Sia $I(\omega) := \exp\left(\beta \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \notin \Lambda \\ |i-j|=1}} \omega_i (1-\eta_j)\right)$

Così $\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} = \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\eta} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} I(\omega)$.

Per f non-decrescente:

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} f(\omega) \geq \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\eta} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} I(\omega) f(\omega)$$

(Se $\mathrm{supp}(f) \subset \Lambda$ anche "$=$".)

Allora:

$$\langle f \rangle_{\Lambda,\beta,h}^+ = \frac{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} f(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)}}$$

$$\geq \frac{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\eta} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} I(\omega) f(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\eta} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)} I(\omega)} = \frac{\langle I f \rangle_{\Lambda,\beta,h}^\eta}{\langle I \rangle_{\Lambda,\beta,h}^\eta}$$

$$\overset{FKG}{\geq} \langle f \rangle_{\Lambda,\beta,h}^\eta.$$

(Saltiamo $\eta = \emptyset$, $\eta =$ periodiche.)

$\blacksquare$