Onsager 1944: per $d=2$, e solo per $h=0$:

$$\psi(\beta,0) = \log(2) + \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \, \log\Big(\cosh^2(2\beta) - \sinh(2\beta)(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\Big)$$

In $d>2$: non si sa niente.

4.2 Gli stati in volume infinito

Ci sono due possibilità:

- studiare il limite di $\mu^{\eta}_{\Lambda_n,\beta,h}$ per $\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d$
- identificare lo stato con il funzionale che assegna un valore ad ogni osservabile locale.] noi

Per il teorema di Riesz-Markov sono approcci equivalenti.

Definizione: Ricordiamo $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$.

Una funzione $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ è locale se esiste $\Delta \subset \mathbb{Z}^d$ compatto tale che: $\omega|_\Delta = \omega'|_\Delta \Rightarrow f(\omega) = f(\omega')$.

L'insieme più piccolo del tipo di Δ viene chiamato *supporto* di f, $\mathrm{supp}(f)$.

Definizione: Uno *stato* è una funzione

$\langle \cdot \rangle : \{\text{funzione locale}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- è normalizzato: $\langle 1 \rangle = 1$.
- positivo: $f \geq 0 \Rightarrow \langle f \rangle \geq 0$.
- lineare: $\langle f + \lambda g \rangle = \langle f \rangle + \lambda \langle g \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$\langle f \rangle$ viene chiamato la *media* f in $\langle \cdot \rangle$.

Definizione: Sia $\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d$ e $(\eta_n)_{n\geq 1}$ una successione di condizioni al contorno. Si dice che $(\mu^{\eta_n}_{\Lambda_n,\beta,h})_{n\geq 0}$ converge a $\langle \cdot \rangle$ se

$$\lim_{n\to\infty} \langle f \rangle^{\eta_n}_{\Lambda_n,\beta,h} = \langle f \rangle \quad \text{per ogni funzione locale } f.$$

In questo caso $\langle \cdot \rangle$ viene chiamato *stato di Gibbs per (β,h)*.

Definizione: Per $j \in \mathbb{Z}^d$, la traslazione $\theta_j : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d$ è definita da: $\theta_j i := i + j \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d$.

Se $\omega \in \Omega$, la traslazione $\theta_j \omega$ della configurazione ω è:
$$(\theta_j \omega)_i := \omega_{i-j}.$$

Uno stato $\langle \cdot \rangle$ ha l'invarianza traslazionale se
$$\langle f \circ \theta_j \rangle = \langle f \rangle \quad \forall j \in \mathbb{Z}^d$$
e per ogni funzione locale f.

Teorema 4: Sia $\beta \geq 0$, $h \in \mathbb{R}$. Se $\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d$ allora esistono
$$\lim_{n\to\infty} \langle \cdot \rangle^+_{\Lambda_n,\beta,h} =: \langle \cdot \rangle^+_{\beta,h}, \quad \lim_{n\to\infty} \langle \cdot \rangle^-_{\Lambda_n,\beta,h} =: \langle \cdot \rangle^-_{\beta,h}.$$

Gli stati $\langle \cdot \rangle^{\pm}_{\beta,h}$ non dipendono dalla successione Λ_n e hanno l'invarianza traslazionale.

Dimostrazione: la prossima volta.

Commento: Per (β,h) esiste una transizione di fase se $\langle \cdot \rangle^+_{\beta,h} \neq \langle \cdot \rangle^-_{\beta,h}$.

Definizione: Per $A \subset \mathbb{Z}^d$ compatto:
$$\sigma_A := \prod_{j\in A} \sigma_j, \quad n_A := \prod_{j \in A} n_j \quad \text{dove } n_j := \tfrac{1}{2}(1+\sigma_j).$$

Lemma 5: Sia f locale. Allora esistono $\hat{f}_A \in \mathbb{R}$ e $\tilde{f}_A \in \mathbb{R}$ tale che:
$$f = \sum_{A \subset \mathrm{supp}(f)} \hat{f}_A \sigma_A, \quad f = \sum_{A \subset \mathrm{supp}(f)} \tilde{f}_A n_A.$$

Dimostrazione: per $B \subset \mathbb{Z}^d$ compatto, e $\forall \omega, \tilde{\omega} \in \Omega$:
$$2^{-|B|} \sum_{A \subset B} \sigma_A(\tilde{\omega})\sigma_A(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega_i = \tilde{\omega}_i \; \forall i \in B\}} = \delta_{\omega\restriction_B, \tilde{\omega}\restriction_B}.$$
"relazione di ortonormalità".

Infatti: sia $\omega_i = \tilde{\omega}_i \; \forall i \in B$. Allora
$$\sigma_A(\tilde{\omega})\sigma_A(\omega) = \prod_{i\in A} \tilde{\omega}_i \omega_i = \prod_{i \in A} \omega_i^2 = \prod_{i\in A} (\pm 1)^2 = 1.$$

$$\sum_{A\subset B} \sigma_A(\tilde\omega)\sigma_A(\omega) = \sum_{A\subset B} 1 = 2^{|B|}.$$

Invece, sia adesso $\hat\omega \neq \omega$. Allora esiste $i \in B$ tale che

$\omega_i\,\hat\omega_i = -1$.

$$\sum_{A\subset B} \sigma_A(\tilde\omega)\sigma_A(\omega) = \sum_{A\subset B\setminus\{i\}} \Big(\sigma_A(\tilde\omega)\sigma_A(\omega) + \sigma_{A\cup\{i\}}(\tilde\omega)\sigma_{A\cup\{i\}}(\omega)\Big)$$

$$= \sum_{A\subset B\setminus\{i\}} \Big(\sigma_A(\tilde\omega)\sigma_A(\omega) + \underbrace{\hat\omega_i\,\omega_i}_{=-1}\,\sigma_A(\tilde\omega)\sigma_A(\omega)\Big) = 0.$$

Così abbiamo dimostrato la relazione di ortonormalità.

Usando la con f:

$$f(\omega) = \sum_{\omega'\in\Omega_{supp(f)}} f(\omega')\, \mathbb{1}_{\{\omega_i = \omega_i' \ \forall i\in supp(f)\}}$$

$$= \sum_{\omega'\in\Omega_{supp(f)}} f(\omega')\, 2^{-|supp(f)|} \sum_{A\subset supp(f)} \sigma_A(\omega')\sigma_A(\omega)$$

$$= \sum_{A\subset supp(f)} \underbrace{\Big(2^{-|supp(f)|}\sum_{\omega'\in\Omega_{supp(f)}} f(\omega')\sigma_A(\omega')\Big)}_{\hat f_A} \sigma_A(\omega)$$

Con $\sigma_A = \prod_{i\in A}(2n_i - 1)$ si ottiene ade l'identità con $\tilde f_A$. ▨

Grazie al lemma J è sufficiente studiare la convergenza di $\left(\langle f\rangle^{\eta_n}_{\Lambda_n,\beta,h}\right)_{n\geq 1}$ per $f = \sigma_A$, $A \subset \mathbb{Z}^d$ compatto.

4.3 Le disequazioni di correlazione

Per costruire $\langle\cdot\rangle^{+}_{\beta,h}$ ci servono le disequazioni GKS e FKG. Iniziamo con GKS.

<u>Idea:</u> Consideriamo le condizioni al contorno con orientamento positivo.

Sembrerebbe assurdo che gli spin nel volume abbiano una preferenza per l'orientamento negativo, almeno se abbiamo anche $h \geq 0$.

Congettura: $\langle \sigma_i \rangle^+_{\Lambda,\beta,h} \geq 0 \quad \forall i \in \Lambda$.

Inoltre, se abbiamo già un spin positivo, può solo aumentare la probabilità di avere un altro spin anche positivo.

Congettura: $$\underbrace{\mu^+_{\Lambda,\beta,h}(\sigma_i = +1 \mid \sigma_j = +1)}_{\substack{\text{la probabilità condizionata:} \\ \text{la probabilità che si verifichi} \\ \sigma_i = 1 \text{, sapendo già che } \sigma_j = +1 \text{ è verificato.}}} \geq \mu^+_{\Lambda,\beta,h}(\sigma_i = +1).$$

$$\| $$

$$\frac{\mu^+_{\Lambda,\beta,h}(\sigma_i = 1 \wedge \sigma_j = 1)}{\mu^+_{\Lambda,\beta,h}(\sigma_j = 1)}$$

$$\Longleftrightarrow \mu^+_{\Lambda,\beta,h}(\sigma_i = 1 \wedge \sigma_j = 1) \geq \mu^+_{\Lambda,\beta,h}(\sigma_i = 1)\,\mu^+_{\Lambda,\beta,h}(\sigma_j = 1).$$

Usando adesso che $\mathbb{1}_{\{\sigma_i = 1\}} = \frac{1}{2}(\sigma_i + 1)$, e $\langle 1 \rangle^+_{\Lambda,\beta,h} = 1$, questo si può anche scrivere come
$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^+_{\Lambda,\beta,h} \geq \langle \sigma_i \rangle^+_{\Lambda,\beta,h} \langle \sigma_j \rangle^+_{\Lambda,\beta,h}.$$

Definizione: Sia $\underline{J} = (J_{ij})$ una collezione di $J_{ij} \in \mathbb{R}$, sia $\underline{h} = (h_i)$, $h_i \in \mathbb{R}$.

Scriviamo $\underline{J} \geq 0$ se $J_{ij} \geq 0 \ \forall i,j$, e $\underline{h} \geq 0$ se $h_i \geq 0 \ \forall i$.

Per $\omega \in \Omega^\eta_\Lambda$:
$$\mathcal{H}_{\Lambda,\underline{J},\underline{h}}(\omega) := -\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}^b_\Lambda} J_{ij}\, \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - \sum_{i \in \Lambda} h_i\, \sigma_i(\omega).$$

E analogamente $\mu^\eta_{\Lambda,\underline{J},\underline{h}}$ come sempre.

Per $J_{ij} = \beta \ \forall i,j$ e $h_i = h \ \forall i$ torniamo all'Hamiltoniana conosciuta.

Teorema 6: (Griffiths, Kelly, Sherman) Sia $\underline{\eta} \geq 0$, $\underline{h} \geq 0$, e $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ compatto. Allora per ogni $A, B \subset \Lambda$:

$$\langle \sigma_A \rangle^+_{\Lambda, \underline{\eta}, \underline{h}} \geq 0$$

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle^+_{\Lambda, \underline{\eta}, \underline{h}} \geq \langle \sigma_A \rangle^+_{\Lambda, \underline{\eta}, \underline{h}} \langle \sigma_B \rangle^+_{\Lambda, \underline{\eta}, \underline{h}}.$$

Queste disequazioni rimangono valide senza condizioni al contorno ($\eta = \emptyset$), e con condizioni al contorno periodiche.

Dimostrazione: Scriviamo la misura canonica come

$$\mu_{\Lambda, \underline{K}}(\omega) := \frac{1}{Z_{\Lambda, \underline{K}}} \exp\Big(\sum_{C \subset \Lambda} K_C \, \omega_C \Big), \quad \text{dove } \omega_C = \prod_{i \in C} \omega_i$$

con
$$K_C := \begin{cases} h + |\{j \notin \Lambda : |j - i| = 1\}| & \text{per } C = \{i\} \subset \Lambda \\ \beta & \text{per } C = \{i,j\} \in \mathcal{E}^b_\Lambda \\ 0 & \text{per il resto.} \end{cases}$$

Ovviamente $K_C \geq 0 \quad \forall C$.

$\underline{\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \underline{K}} \geq 0:}$
$$Z_{\Lambda, \underline{K}} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \underline{K}} = \sum_{\omega} \overset{\sigma_A(\omega)}{\omega_A} \prod_{C \subset \Lambda} e^{K_C \omega_C}.$$
($\sum_\omega$: tutte le configurazioni)

Scriviamo $e^{K_C \omega_C} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} K_C^n \omega_C^n$.

$$\Rightarrow Z_{\Lambda, \underline{K}} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \underline{K}} = \sum_{\omega} \omega_A \prod_{C \subset \Lambda} \Big(\sum_{n_C \in \mathbb{N}} \frac{1}{n_C!} K_C^{n_C} \omega_C^{n_C} \Big)$$

$$= \sum_{\omega} \omega_A \underbrace{\sum_{n_{C_1} \in \mathbb{N}} \cdots \sum_{n_{C_{2^{|\Lambda|}}} \in \mathbb{N}}}_{} \prod_{i=1}^{2^{|\Lambda|}} \frac{1}{n_{C_i}!} K_{C_i}^{n_{C_i}} \omega_{C_i}^{n_{C_i}}$$

$$= \sum_{\omega} \omega_A \sum_{\substack{n_C \in \mathbb{N} \\ \text{per ogni } C \subset \Lambda}} \prod_{C \subset \Lambda} \frac{1}{n_C!} K_C^{n_C} \omega_C^{n_C}$$

$$= \sum_{\substack{n_C \in \mathbb{N} \\ \text{per ogni } C \subset \Lambda}} \Big(\prod_{C \subset \Lambda} \frac{K_C^{n_C}}{n_C!} \Big) \sum_{\omega} \omega_A \prod_{C \subset \Lambda} \omega_C^{n_C}.$$

Scriviamo
$$\omega_A \prod_{C \subset \Lambda} \omega_C^{n_C} = \prod_{i \in \Lambda} \omega_i \prod_{C \subset \Lambda} \Big(\prod_{j \in C} \omega_j^{n_C} \Big)$$

$$= \prod_{i \in \Lambda} \omega_i^{m_i} \quad \text{con } m_i := \mathbb{1}_{\{i \in A\}} + \sum_{C \subset \Lambda} \sum_{i \in C} n_C.$$

poi: $\sum_{\omega} \omega_A \prod_{C\subset\Lambda} \omega_C^{n_C} = \sum_{\omega} \prod_{i\in\Lambda} \omega_i^{m_i}$

$$= \sum_{\omega_1=\pm1} \cdots \sum_{\omega_{|\Lambda|}=\pm1} \prod_{i\in\Lambda} \omega_i^{m_i}$$

$$= \prod_{i\in\Lambda} \underbrace{\Big(\sum_{\omega_i=\pm1} \omega_i^{m_i} \Big)}_{} \geq 0 .$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{se } m_i \text{ è pari (anche } =0) \\ 0 & \text{se } m_i \text{ è dispari.} \end{cases}$$

$\underline{\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda,\underline{K}} \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda,\underline{K}} \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda,\underline{K}}}$:

Trucco: duplicare la misura.

Consideriamo $\mu_{\Lambda,\underline{K}} \otimes \mu_{\Lambda,\underline{K}}$ su $\Omega_\Lambda \times \Omega_\Lambda$,

definita come $\mu_{\Lambda,\underline{K}} \otimes \mu_{\Lambda,\underline{K}} (\omega, \omega') := \mu_{\Lambda,\underline{K}}(\omega) \mu_{\Lambda,\underline{K}}(\omega')$.

Definiamo $\sigma_i(\omega,\omega') := \omega_i$, $\sigma_i'(\omega,\omega') := \omega_i'$.

Allora

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda,\underline{K}} - \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda,\underline{K}} \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda,\underline{K}}$$

$$= \langle \sigma_A (\sigma_B - \sigma_B') \rangle_{\mu_{\Lambda,\underline{K}} \otimes \mu_{\Lambda,\underline{K}}} .$$

Dobbiamo solo dimostrare che

$$(Z_{\Lambda,\underline{K}})^2 \langle \sigma_A (\sigma_B - \sigma_B') \rangle_{\mu_{\Lambda,\underline{K}} \otimes \mu_{\Lambda,\underline{K}}} \geq 0$$

$$\|$$

$$\sum_{(\omega,\omega')} \omega_A (\omega_B - \omega_B') \prod_{C\subset\Lambda} e^{K_C(\omega_C + \omega_C')} .$$

Con $\omega_i'' := \omega_i \omega_i' = \omega_i'/\omega_i$ otteniamo:

$$\sum_{(\omega,\omega')} \omega_A (\omega_B - \omega_B') \prod_{C\subset\Lambda} e^{K_C(\omega_C + \omega_C')}$$

$$= \sum_{(\omega,\omega'')} \omega_A \omega_B (1 - \omega_B'') \prod_{C\subset\Lambda} e^{K_C(1+\omega_C'')\omega_C}$$

$$= \sum_{\omega''} \underbrace{(1 - \omega_B'')}_{\geq 0} \sum_{\omega} \omega_A \omega_B \prod_{C\subset\Lambda} e^{\tilde{K}_C \omega_C} \quad \text{dove } \tilde{K}_C = K_C(1+\omega_C'')$$

≥ 0 seguendo esattamente l'argomento della prima parte della dimostrazione perché $\tilde{\alpha}_c \geq 0$.