3.5 Condizioni al contorno

Sia $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\Lambda^c := \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda$.

Poniamo $\partial^{in}\Lambda := \{ z \in \Lambda : \exists\, x \in \Lambda^c \text{ tale che } |x - z| = 1 \}$.

L'Hamiltoniana con ~~condizioni~~ positivi:

$$H^+(\underline{\sigma}) := H(\underline{\sigma}) + \sum_{i \in \partial^{in}\Lambda} \sigma_i$$

e con condizioni negativi: $H^-(\underline{\sigma}) = H(\underline{\sigma}) - \sum_{i \in \partial^{in}\Lambda} \sigma_i$.

Se guardiamo $H^+(\underline{\sigma})$ a $T < T_c$:

$$\uparrow \ \uparrow \ \uparrow \ \uparrow \ \uparrow \ \uparrow \ \uparrow \ \uparrow \ \uparrow \ \uparrow$$

fisso   fisso

Prendendo adesso il limite $\Lambda \to +\infty$: $\ldots \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \ldots$

Invece a $T > T_C$:

$$\uparrow \ \uparrow \ \downarrow \ \uparrow \ \uparrow \ \downarrow \ \downarrow \ \uparrow \ \uparrow \ \uparrow$$

$$\uparrow \ \downarrow \ \uparrow \ \downarrow \ \downarrow \ \uparrow \ \uparrow \ \downarrow \ \downarrow \ \uparrow$$

nessuna preferenza di orientazione.

Temperatura alta $\Rightarrow$ il sistema non ricorda le condizioni al contorno.

$T > T_C$: esiste solo una fase

$T < T_C$: esistono due: $\uparrow \uparrow \uparrow \ldots$ e $\downarrow \downarrow \downarrow \ldots$.

4 La teoria rigorosa del modello di Ising

(capitolo 3 del libro Velenik – Friedli)

<u>Definizione:</u> Sia $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ un insieme compatto.

Le <u>configurazioni</u> del modello di Ising sono gli elementi di

$$\Omega_\Lambda := \{-1, +1\}^\Lambda.$$

Allora $\omega \in \Omega_\Lambda \iff \omega = (\omega_i)_{i \in \Lambda}$, $\omega_i \in \{-1, +1\}$.

Il <u>valore del spin nel punto $i \in \Lambda$</u> è la variabile casuale (la funzione)

$$\sigma_i : \Omega_\Lambda \longrightarrow \{-1, +1\}$$

$$\omega \longmapsto \sigma_i(\omega) = \omega_i.$$

Scriviamo per l'insieme delle coppie di <u>primi vicini</u>:

$$\mathcal{E}_\Lambda := \{ \{i,j\} \in \Lambda \times \Lambda : |i-j| = 1 \}.$$

L'Hamiltoniana ci da <u>l'energia di una configurazione</u>

$$\mathcal{H}^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h}(\omega) := -\beta \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} \sigma_i(\omega)\,\sigma_j(\omega) - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega).$$

(β incluso in $\mathcal{H}$)

("$\emptyset$" indica che non ci sono condizioni al contorno).

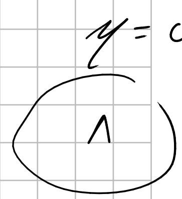
<u>La distribuzione canonica:</u>

$$\mu^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h}(\omega) := \frac{1}{Z^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h}} \exp\left(-\mathcal{H}^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)\right).$$

La <u>funzione di partizione:</u>

$$Z^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h} := \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \exp\left(-\mathcal{H}^{\emptyset}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)\right).$$

Per rappresentare le <u>condizioni al contorno</u>:



$$\Omega := \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d},$$

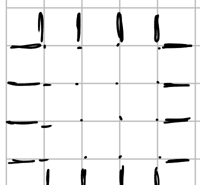
e dato $\eta \in \Omega$ poniamo:

$$\Omega^{\eta}_{\Lambda} := \{ \omega \in \Omega : \omega_i = \eta_i \ \forall i \notin \Lambda \}.$$

(Configurazione uguali ad η fuori di Λ.)

Per $\omega \in \Omega^{\eta}_{\Lambda}$:

$$\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega) := -\beta \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}^b_\Lambda} \sigma_i(\omega)\,\sigma_j(\omega) - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega)$$



dove $\mathcal{E}^b_\Lambda := \mathcal{E}_\Lambda \cup \{ \{i,j\} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : ((i \notin \Lambda \text{ e } j \in \Lambda) \text{ o } (i \in \Lambda \text{ e } j \notin \Lambda)) \text{ e } |i-j| = 1 \}.$

Così si definisce $\mu^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}(\omega)$, $Z^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}$.

Scriviamo μ^+ per $\eta_i = +1 \ \forall i \in \mathbb{Z}^d$,
e μ^- per $\eta_i = -1 \ \forall i \in \mathbb{Z}^d$.

Il valore atteso di una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\langle f \rangle^{\eta}_{\Lambda,\beta,h} := \sum_{\omega \in \Omega^{\eta}_{\Lambda}} f(\omega)\, \mu^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}(\omega).$$

(Permetto anche $\eta = \emptyset$.)

Si dice che una successione $\Lambda_n \to \infty$ nel senso di van Hove ($\Lambda_n \Uparrow \mathbb{Z}^d$) se

- $\Lambda_{n+1} \supset \Lambda_n$
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \mathbb{Z}^d$
- per $\partial^{in}\Lambda := \{ i \in \Lambda : \exists j \notin \Lambda \text{ con } |i-j| = 1 \}$ vale che $$\lim_{n\to\infty} \frac{|\partial^{in}\Lambda_n|}{|\Lambda_n|} = 0.$$

Commento: $\Lambda_n \to \infty$ (Fisher) $\Rightarrow$ $\Lambda_n \to \infty$ (van Hove)

Il potenziale canonico: $\psi^{\eta}_{\Lambda}(\beta,h) := \dfrac{\log Z^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}}{|\Lambda|}$.

Lemma 1: $(\beta,h) \longmapsto \psi^{\eta}_{\Lambda}(\beta,h)$ è convessa.

Dimostrazione: Sia $\alpha \in [0,1]$.

$$Z^{\eta}_{\Lambda,\, \alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2,\, \alpha h_1 + (1-\alpha) h_2}$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega^{\eta}_{\Lambda}} \exp\left(-\alpha \mathcal{H}_{\Lambda,\beta_1,h_1}(\omega) - (1-\alpha)\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_2,h_2}(\omega)\right)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega^{\eta}_{\Lambda}} \left(\exp(-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_1,h_1}(\omega))\right)^{\alpha} \left(\exp(-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_2,h_2}(\omega))\right)^{1-\alpha}$$

usiamo la disuguaglianza di Hölder:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{per } q,p>1 \text{ tali che } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

otteniamo con $p = \frac{1}{\alpha}$, $q = \frac{1}{1-\alpha}$:

$$\le \left(\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\eta} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_1,h_1}(\omega)} \right)^\alpha \left(\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^\eta} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda,\beta_2,h_2}(\omega)} \right)^{1-\alpha} .$$

Col logaritmo:

$$\psi_\Lambda^\eta(\alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2, \alpha h_1 + (1-\alpha) h_2)$$
$$\le \alpha \psi_\Lambda^\eta(\beta_1, h_1) + (1-\alpha)\psi_\Lambda^\eta(\beta_2, h_2) .$$

$\blacksquare$

<u>Teorema 2:</u> Il limite termodinamico

$$\psi(\beta,h) := \lim_{\Lambda \Uparrow \mathbb{Z}^d} \psi_\Lambda^\eta(\beta,h) \quad \text{esiste},$$

non dipende dalla succesione Λ_n, non dipende dalle condizioni al contorno η, ed è convessa su $[0,\infty) \times \mathbb{R}$.

<u>Dimostrazione:</u>

- Esistenza e indipendenza da Λ: come capitolo 2.
- <u>Independenza da η:</u> Per $\omega \in \Omega_\Lambda$, scriviamo ω' per la configurazione tale che: $\omega' \restriction_\Lambda = \omega$ e $\omega' \restriction_{\Lambda^c} = \eta \restriction_{\Lambda^c}$.

  La differenza dell'energia:

  $$|\mathcal{H}_{\Lambda,\beta,h}(\omega') - \mathcal{H}_\Lambda^\emptyset(\omega)| \le |\partial^{in}\Omega| \underbrace{2d}_{\text{numero di primi vicini in dimensione } d} \beta$$

  $$\Rightarrow e^{-\beta 2d |\partial^{in}\Lambda|} Z^\emptyset_{\Lambda,\beta,h} \le Z^\eta_{\Lambda,\beta,h} \le e^{+\beta 2d |\partial^{in}\Lambda|} Z^\emptyset_{\Lambda,\beta,h} .$$

  Prendendo il logaritmo:
  usando $|\partial^{in}\Lambda| / |\Lambda| \longrightarrow 0$ segue il risultato.
- Il limite di una succesione di funzioni convesse è anche convesso.

$\blacksquare$

<u>Definizione:</u> - La <u>densità di magnetizzazione</u> è

$$m_\Lambda := \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i : \Omega_\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$$

• La magnetizzazione è: $m^{\eta}_{\Lambda,\beta,h} := \langle m_\Lambda \rangle^{\eta}_{\Lambda,\beta,h}$.

Compito: Dimostrate che $m^{\eta}_{\Lambda,\beta,h} = \frac{\partial \psi^{\eta}_{\Lambda}}{\partial h}(\beta,h)$.

Attenzione: $\partial/\partial h$ non commuta sempre con $\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d}$.

Una funzione convessa ha al massimo un numero numerabile di punti di gomito, e
$\partial^- f(x) \leq \partial^+ f(x) \quad \forall x$.

In particolare: la magnetizzazione spontanea
$$m^*(\beta) := \lim_{h \to 0+} m(\beta,h)$$
esiste per ogni $\beta \in [0,\infty)$.

I punti di non-derivabilità di ψ rispetto h sono essattamente i punti h dove
$$\lim_{h' \to h+} m(\beta,h') \neq \lim_{h' \to h-} m(\beta,h').$$

Definizione: ψ ha una transizione di fase nel (β,h) se $h \longmapsto \psi(\beta,h)$ non è derivabile lì.

4.1 Modello di Ising in dimensione $d=1$

In una dimensione si può calcolare tutto.

Teorema 3: Per $d=1$, per ogni $\beta \geq 0$, per ogni $h \in \mathbb{R}$ abbiamo
$$\psi(\beta,h) = \log\left(e^{\beta}\cosh(h) + \sqrt{e^{2\beta}\cosh^2(h) - 2\sinh(2\beta)}\right).$$
In particolare ψ è derivabile dappertutto, allora non ci sono le transizioni di fase.

Commento:

Questo è il comportamento normale per $d = 1$.

Compito: Dimostrate che per $\beta \to +\infty$ ($T = 0$)

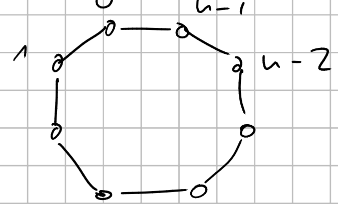
$$\lim_{\beta \to \infty} m(\beta, h) = \begin{cases} +1 & \text{se } h > 0 \\ 0 & \text{se } h = 0 \\ -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}.$$

Dimostrazione del teorema 3:

Consideriamo condizioni al contorno periodiche:

$$\Lambda_n = \{0, 1, 2, \dots n-1\}$$

$$\mathcal{E}^{per}_{\Lambda} = \mathcal{E}_{\Lambda} \cup \{\{0, n-1\}\}$$



Con l'argomento del teorema 2: $\psi^{per}(\beta, h) = \psi^{+}(\beta, h) = \psi^{\emptyset}(\beta, h)$.

Così $Z^{per}_{\Lambda, n, h}$ può essere scritto come una traccia:

$$Z^{per}_{\Lambda_n, \beta, h} = \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda_n}} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda_n, \beta, h}(\omega)}$$

$$= \sum_{\omega_0 \in \{\pm 1\}} \cdots \sum_{\omega_{n-1} \in \{\pm 1\}} \prod_{i=0}^{n-1} \underbrace{e^{\beta \omega_i \omega_{i+1} + h \omega_i}}_{=: A_{\omega_i, \omega_{i+1}}}$$

dove $\omega_n = \omega_0$

allora $A = \begin{pmatrix} A_{+,+} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta + h} & e^{-\beta + h} \\ e^{-\beta - h} & e^{\beta - h} \end{pmatrix}$.

"transfer matrix"

Così: $Z^{per}_{\Lambda_n,\beta,h} = \sum_{\omega_0 \in \{\pm 1\}} (A^n)_{\omega_0,\omega_0} = tr(A^n)$.

Autovalori di A:

$$\lambda_\pm = e^\beta \cosh(h) \pm \sqrt{e^{2\beta}\cosh^2(h) - 2\sinh(2\beta)}.$$

Gli autovalori A^n: sono λ_+^n e λ_-^n.

La traccia: $tr(A^n) = \lambda_+^n + \lambda_-^n$.

Allora

$$\psi(\beta,h) = \lim_{|\Lambda_n| \to \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \log(\lambda_+^n + \lambda_-^n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \cancel{\frac{1}{n}} \log(\lambda_+^{\cancel{n}}) + \underbrace{\frac{1}{n} \log\Big(1 + \underbrace{\Big(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\Big)}_{\lambda_- \leq \lambda_+}^n\Big)}_{\longrightarrow 0}$$

$$= \log(\lambda_+)$$

$\blacksquare$