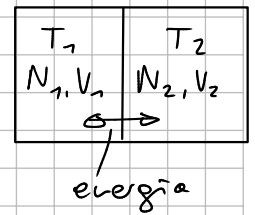


## Soluzioni Esercizi

### Equilibratura della temperatura di due gas ideali



Inizialmente i sistemi sono completamente

separati:  $\Omega_{totale} = \Omega(N_1, E_1, V_1) \Omega(N_2, E_2, V_2)$

$$S_{iniziale} = S(N_1, E_1, V_1) + S(N_2, E_2, V_2).$$

Mettendo i due sistemi in contatto:

$$\Omega_{finale} = \int_0^E dE \Omega(N_1, E - E_2, V_1) \Omega(N_2, E_2, V_2)$$

"metodo di Laplace"  $= \Omega(N_1, \bar{E}_1, V_1) \Omega(N_2, \bar{E}_2, V_2)$

dove  $E_1 + E_2 = E \Rightarrow \bar{E}_1 = E - \bar{E}_2$ .

Usando il fatto che abbiamo equilibratura della temperatura:

$$\left. \frac{3}{2} k_B \frac{N_1}{\bar{E}_1} = \frac{\partial S(N_1, \bar{E}_1, V_1)}{\partial E} = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = \frac{\partial S(N_2, \bar{E}_2, V_2)}{\partial E} = \frac{3}{2} k_B \frac{N_2}{\bar{E}_2} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{N_1}{\bar{E}_1} = \frac{N_2}{\bar{E}_2}, \quad E_1 + E_2 = E = \bar{E}_1 + \bar{E}_2.$$

$$\Delta S = S_{finale} - S_{iniziale}$$

$$= k_B N_1 \left( \frac{5}{2} + \log \left( \frac{V_1}{N_1} \left( \frac{2\pi}{3} \frac{\bar{E}_1}{N_1} \right)^{3/2} \right) \right) + k_B N_2 \left( \frac{5}{2} + \log \left( \frac{V_2}{N_2} \left( \frac{2\pi}{3} \frac{\bar{E}_2}{N_2} \right)^{3/2} \right) \right) - k_B N_1 \left( \frac{5}{2} + \log \left( \frac{V_1}{N_1} \left( \frac{2\pi}{3} \frac{E_1}{N_1} \right)^{3/2} \right) \right) - k_B N_2 \left( \frac{5}{2} + \log \left( \frac{V_2}{N_2} \left( \frac{2\pi}{3} \frac{E_2}{N_2} \right)^{3/2} \right) \right) > 0.$$

formula di Sturck-Tetrode

(Questo dimostra che l'equilibratura delle temperature è irreversibile.)

$$\bar{E}_1 = N_1 \frac{\bar{E}_2}{N_2} \Rightarrow E = \frac{N_1}{N_2} \bar{E}_2 + \bar{E}_2$$

$$\Rightarrow \bar{E}_2 = E \frac{1}{\left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)}, \quad \bar{E}_1 = E \frac{1}{\left(1 + \frac{N_2}{N_1}\right)}$$

$$\Delta S = k_B N_1 \frac{3}{2} \log \left( \frac{\bar{E}_1}{N_1} \right) + k_B N_2 \frac{3}{2} \log \left( \frac{\bar{E}_2}{N_2} \right) - k_B N_1 \frac{3}{2} \log \left( \frac{E_1}{N_1} \right) - k_B N_2 \frac{3}{2} \log \left( \frac{E_2}{N_2} \right)$$

$$= \frac{3}{2} k_B \left( N_1 \log \left( \frac{\bar{E}_1}{E_1} \right) + N_2 \log \left( \frac{\bar{E}_2}{E_2} \right) \right)$$

$$= \frac{3}{2} k_B \left( N_1 \log \left( \frac{E}{E_1 \left(1 + \frac{N_2}{N_1}\right)} \right) + N_2 \log \left( \frac{E}{E_2 \left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)} \right) \right)$$

$$(N_1 = N_2): \log \left( \frac{E}{E_1 \cdot 2} \right) + \log \left( \frac{E}{E_2 \cdot 2} \right)$$

$$= \log \left( \frac{(E_1 + E_2)^2}{4 E_1 E_2} \right)$$

$$= \log \left( \frac{E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2}{4 E_1 E_2} \right)$$

$$E_1^2 + E_2^2 > 2 E_1 E_2 \quad > \log \left( \frac{4 E_1 E_2}{4 E_1 E_2} \right) = \log(1) = 0.$$

(per  $E_1 \neq E_2$ )

Esercizi: (1) Calcolare l'entropia mc / l'energia libera / il potenziale gran canonico per il sistema del gas relativistico:

$$H(p, q) = K(p) = \sum_{i=1}^N \sqrt{|p_i|^2 + m^2}.$$

(2) Calcolare  $\Delta S$  per l'equilibrato della pressione.



$$p_1 > p_2$$

Qual'è il volume  $V_1, V_2$  de loro?

(3) Calcolare l'energia libera  $Z$  di un sistema di

$N$  oscillatori armonici in  $1D$ .  $H(p, q) = \sum_{i=1}^N \left( p_i^2 + \frac{k}{2} x_i^2 \right)$ .

Calcolare l'energia  $\bar{E}$  in dipendenza della temperatura.

Stessa domanda per il sistema gran canonico e  $\bar{N}(\mu)$ .

(4) Per il sistema di (3): calcolare l'entropia nell'insieme mc, nell'insieme canonico  $\mu$  e con trasformata di Legendre l'entropia, e anche per l'insieme g.c.

Sono uguali?

Se non uguali, sono almeno uguali quando prendo un limite termodinamico?

(5) Consideriamo un sistema con solo due livelli di energia per ogni particella:

$$H = \sum_{i=1}^N \epsilon_i, \quad \epsilon_i \in \{0, 1\}, \quad N \text{ fisso.}$$

Definire l'insieme m.c., definire l'entropia.

Si può ottenere temperatura negativa?

Quando? Perché?

### 3 Le transizioni di fase: Introduzione

#### Esempi di transizioni di fase:

- solido  $\leftrightarrow$  liquido  $\leftrightarrow$  gas
- ferromagnetico  $\leftrightarrow$  paramagnetico
- ordine  $\leftrightarrow$  disordine nei composti intermetallici
- superconduttività  $\leftrightarrow$  conduttività con resistenza
- condensazione di Bose-Einstein

#### 3.1 Teoria di Van der Waals per la coesistenza di gas e liquido

(Luca Peliti - Statistical Mechanics in a Nutshell, 2003, capitolo 5)

Iniziamo con l'equazione del gas ideale

$$p u = T \quad \text{dove} \quad u = \frac{V}{N} = S^{-1} = \text{volume per particella.}$$

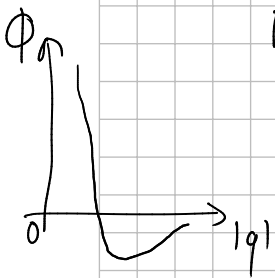
Proviamo di indovinare quale effetto dell'interazione:

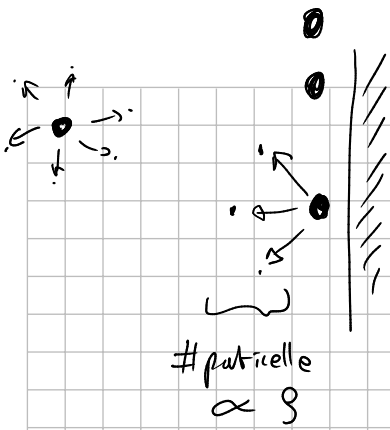
- (a) le particelle hanno una forte repulsione a piccole distanze, che implica che non tutto volume  $V$  può essere occupato:

$$\text{volume per particella } u \longrightarrow u - b, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$b \text{ da aggiungere.} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{T}{u - b}$$

- (b) A distanze un po' più lunghe c'è l'attrazione.





una particella vicino alla parete sente una forza verso il centro del gas.

La forza è  $\propto S$ .

La pressione sulla parete: 
$$\Delta p = \frac{\sum_{i=1}^N F_i}{(\text{unità di superficie})}$$

$\propto S \cdot S$

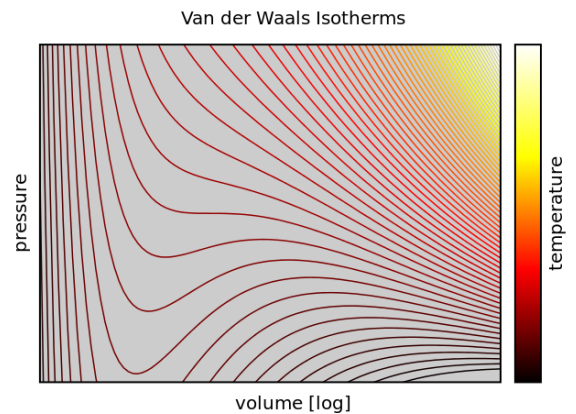
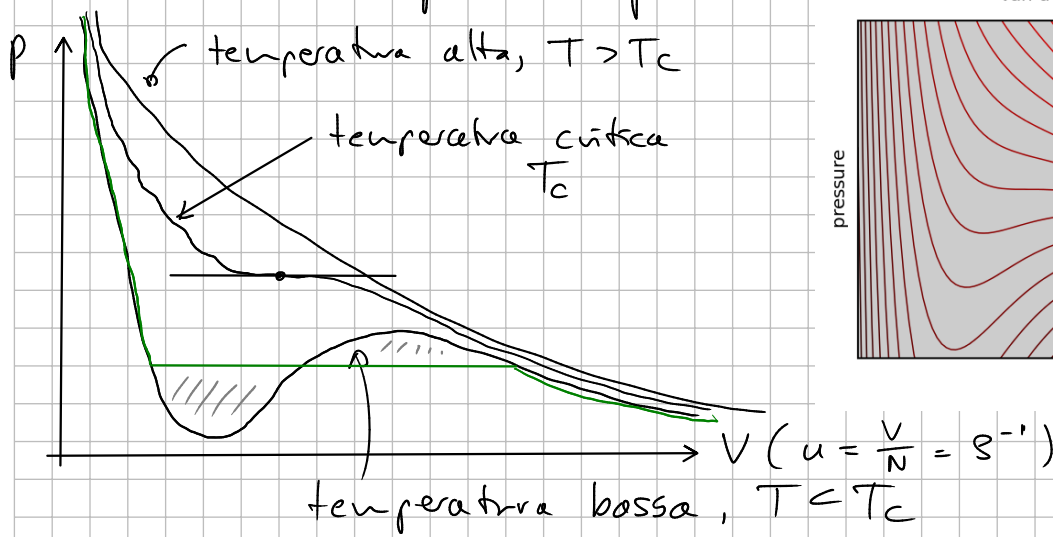
Riduzione della pressione  $p$  per  $\Delta p. \Rightarrow$

$$p = \frac{T}{u-b} - \frac{a}{u^2}, \quad a \in \mathbb{R} \text{ un parametro.}$$

$$\left(p + \frac{a}{u^2}\right)(u-b) = T \quad \text{equazione di Van Der Waals}$$

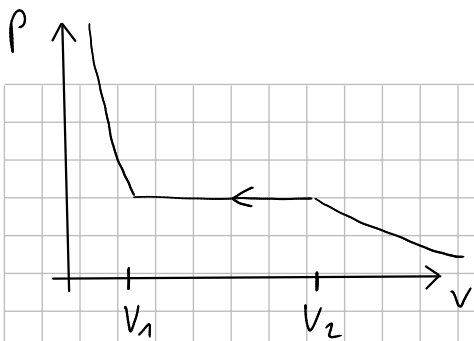
con  $u = \frac{V}{N} = S^{-1}$ .

Curve di pressione come funzione del volume per  $T$  fissa:



Per un modello microscopico, si può dimostrare che  $p(u)$  dev'essere convessa.

Qua  $p(u)$  non è convessa per temperatura  $T < T_c$ !



## Interpretazione



- con la compressione del gas a temperatura fissa da  $V = +\infty$  a  $V_2$ : pressione cresce normalmente.
- da  $V_2$  a  $V_1$ : il volume diventa piccolo, ma la pressione non cresce.

Il gas diventa liquido.

- a  $V_1$  tutto il gas è diventato liquido.

Adesso è poco compressibile e la pressione cresce velocemente.