Lemma 2.2.51 $n \le 8^N$, $S \le n \log V(\Lambda_0)$.

(a)
$$E(\Lambda_N, n, S) \le n \frac{A}{2} \sum_{m=0}^{N-1} 8^{m+1} \frac{1}{R_m^{3+\varepsilon}}$$

(b) per $S = \frac{\rho}{2q}$, $0 \le \delta \le 1$, $\sigma \le \delta \log V(\Lambda_0)$:
$$\eta(\delta, \sigma) \le \delta \frac{A}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8^{m+1}}{R_m^{3+\varepsilon}}.$$

Dimostrazione (continuata):

(a) $E(\Lambda_N, n, S) \le n E(\Lambda_0, 1, S_1) + (8^N - n) E(\Lambda_0, 0, S_0)$ $\qquad S_1 = \log V(\Lambda_0)$
$$+ \sum_{m=1}^{N} \frac{A}{2} \frac{8^{N-m}}{R_{m-1}^{3+\varepsilon}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{8} n_i^{(m)} \right)^2}.$$
$$\le \begin{cases} n & \text{(primo passo)} \\ \frac{n}{8} & \text{(secondo passo)} \\ \vdots \end{cases}$$

Allora:
$$\sum_{m=1}^{N} \frac{A}{2} \frac{8^{N-m}}{R_{m-1}^{3+\varepsilon}} \left(\frac{n}{8^{N-m}} \right)^2 = \frac{A}{2} n \underbrace{\frac{n}{8^N}}_{\le 1 \text{ per l'ipotesi.}} \sum_{m=1}^{N} \frac{8^m}{R_{m-1}^{3+\varepsilon}}.$$

Cosa sono $E(\Lambda_0, 1, S_1)$ e $E(\Lambda_N, 0, S_0)$?

$E(\Lambda_0, 1, S_1)$: con $S_1 := \log V(\Lambda_0)$.

il valore di E tale che $S(\Lambda_0, 1, E) = \log V(\Lambda_0)$.

$$\Leftrightarrow \quad \Omega(\Lambda_0, 1, E) = V(\Lambda_0)$$
$$\Omega(\Lambda_0, 1, E) = \frac{1}{1!} |\{x \in \Lambda_0 : U(x) \le E\}|$$

per una singola particella: $U = 0$.

Vuol dire:
$$\Omega(\Lambda_0, 1, E) = \begin{cases} 0 & \text{per } E < 0 \\ V(\Lambda_0) & \text{per } E \ge 0. \end{cases}$$

Con la scelta che la funzione inversa è continua dalla sinistra:
$$E(\Lambda_0, 1, S_1) = 0.$$

$E(\Lambda_0, 0, S_0)$: con $S_0 \le 0$.

Il valore di E tale che $S(\Lambda_0, 0, E) \le 0$.
$$S(\Lambda_0, 0, E) = \log \Omega(\Lambda_0, 0, E)$$
$$\Leftrightarrow \quad \Omega(\Lambda_0, 0, E) \le 1.$$

e $\Omega(\Lambda_0, 0, E) = \frac{1}{0!} |\{x \in \Lambda_0^0\}| = |\{\emptyset\}| = 1$.

$$\Rightarrow \quad E(\Lambda_N, n, S) \leq n \frac{A}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{8^{m+1}}{R_m^{3+\varepsilon}}.$$

(b) Ricorre

$$\eta(\delta,\sigma) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{8^N} E(\Lambda_N, \underbrace{8^N\delta}_{= n \leq 8^N \text{ perché } \delta \leq 1}, \overbrace{8^N\sigma}^{S \leq 8^N \delta \log V(\Lambda_0) = n \log V(\Lambda_0)})$$

allora (a) è applicabile:

$$\eta(\delta,\sigma) \leq \lim_{N\to\infty} \frac{n}{8^N} \frac{A}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{8^{m+1}}{R_m^{3+\varepsilon}} \qquad (n = 8^N\delta)$$

$$\leq \delta \frac{A}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8^{m+1}}{R_m^{3+\varepsilon}}.$$

$\blacksquare$

Proposizione 2.2.6: [estensione continua di η]

Sia U stabile, Φ temperato, η come costruito.

Allora esiste un insieme non-vuoto, aperto, e convesso $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ tale che η estende per continuità come una funzione convessa in Δ.

Inoltre: $\eta(\delta,\sigma) = +\infty$ se $(\delta,\sigma) \notin \overline{\Delta}$

Inoltre: $\eta(\delta,\sigma)$ è crescente rispetto σ.

Dimostrazione:

Sia $T := \{(\delta,\sigma) : \eta(\delta,\sigma) \neq +\infty\} \subset \mathbb{R}^2$.

Sia $\overline{T}$ la chiusura di T,

e sia $\Delta := \mathring{\overline{T}}$ l'interiore di $\overline{T}$.

Lemma 2.2.4(a): $\eta(\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2), \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2))$

$$\leq \frac{1}{2}\eta(\delta_1,\sigma_1) + \frac{1}{2}(\delta_2,\sigma_2).$$

Allora anche $\Delta := \mathring{\overline{T}}$ è convesso.

Da Lemma 2.2.5 otteniamo che η ha un limite superiore per $0 \leq \delta \leq 1$, $\sigma \leq \delta \log V(\Lambda_0)$,

e allora $\Delta \neq \emptyset$.

Sia $(\delta,\sigma)\in\Delta$. Allora esistono $(\delta_1,\sigma_1)\in\Gamma$, un intorno $B(\delta,\sigma)\ni(\delta,\sigma)$, e $\alpha=2^{-q}p$, $0\leq\alpha\leq 1$, tale che

$$B(\delta,\sigma)\subset\left\{\alpha\begin{pmatrix}\delta_1\\ \sigma_1\end{pmatrix}+(1-\alpha)\begin{pmatrix}\delta_2\\ \sigma_2\end{pmatrix}:\ \begin{matrix}0\leq\delta_2\leq 1\\ \sigma_2\leq\delta_2\log V(\Lambda_0)\end{matrix}\right\}$$

Per Lemma 2.2.4 (b) implica che y è limitato anche su $B(\delta,\sigma)$.

Inoltre: $y(\delta,\sigma)\geq-\delta B$.

Allora per ogni $(\delta,\sigma)\in\Delta$ esiste un intorno $B(\delta,\sigma)\ni(\delta,\sigma)$ tale che $|y|\restriction_{B(\delta,\sigma)}$ è limitato.

Adesso usiamo lemma 2.2.4 (b):

$$y(\alpha\delta_1+(1-\alpha)\delta_2,\alpha\sigma_1+(1-\alpha)\sigma_2)$$
$$\leq\alpha y(\delta_1,\sigma_1)+(1-\alpha)y(\delta_2,\sigma_2)$$

e che y è limitato per <u>dimostrare che esiste una estensione continua su Δ:</u>

Sia $D\subset\Lambda$ sia una palla tale che esiste un $K>0$: $|y(\delta,\sigma)|<K$ per $(\delta,\sigma)\in D$.

Sia D' la palla centrata sullo punto (come D), ma con metà il raggio. Come dimostrato, le palle del tipo di D' coprono Δ completamente.

Usiamo: <u>Lemma standard:</u>

Siano X,Y spazi metrici, Y completo, $E\subset X$ denso, ed $f:E\to Y$ uniformemente continua, allora esiste un'estensione continua di f su X.

<u>Dimostrazione senza dettagli:</u> (del lemma standard)

<u>Lemma:</u> Sia $f:X\to Y$ uniformemente continua e (x_n) una successione di Cauchy, allora $f(x_n)$ è

Cauchy in Y.

<u>Lemma:</u> Sia $S \subset X$, $f: S \to Y$ uniformemente continua. Se (x_n) e (y_n) in S hanno lo stesso limite in X, e $f(x_n)$ è convergente, allora $f(y_n)$ è anche convergente, e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

[Si usa la successione $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots)$.

<u>Dimostrazione del lemma standard:</u>

Definiamo $g: \overline{S} \to Y$ come $g(a) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ con (x_n) una successione in S tale che $x_n \to a$.

Secondo il secondo lemma, g è ben definita.

Per dimostrare che g è uniformemente continua: siano $a, b \in \overline{S}$. Sia $(x_n) \subset S$ tale che $x_n \to a$. Allora $f(x_n) \to g(a)$.

Per j suff. grande: $d(x_j, a)$ e $d(f(x_j), g(a))$ piccolo quanto vogliamo.

Lo stesso per $y_n \to b$.

Allora $d(x_j, x_k)$ piccolo quanto vogliamo per j, k suff. grande, allora $d(g(a), g(b))$ piccolo quanto vogliamo.

— fine dimostrazione lemma standard —

Dobbiamo dimostrare che η è uniformemente continua.

Scriviamo $\zeta = (\delta, \sigma)$. Siano $\zeta', \zeta'' \in D'$, tale che δ', δ'' sono numeri diadici.

Dal lemma 2.2.4 (b):

$$\eta(\zeta') \leq 2^{-q}\, \eta(\zeta'' + 2^q(\zeta' - \zeta'')) + (1 - 2^{-q})\, \eta(\zeta'')$$

$$\Rightarrow \eta(\zeta') - \eta(\zeta'') \leq 2^{-q}\left(\eta(\zeta'' + 2^q(\zeta' - \zeta'')) - \eta(\zeta'')\right). \quad (*)$$

(Con lo stesso argomento anche per $\zeta' \leftrightarrow \zeta''$).

Sia $D = B_R(x)$, e $D' = B_{R/2}(x)$.

Adesso siano (z_n'), (z_n'') successioni in D' tale che $z_n' - z_n'' \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$.

Sia $\varepsilon > 0$. Sia $q \in \mathbb{N}$ tale che $2^{1-q} K < \varepsilon$.

Esiste un $N \in \mathbb{N}$: $n \geq N \Rightarrow |z_n' - z_n''| < 2^{-q} \frac{R}{2}$.

Allora
$$|(z_n' + 2^q(z_n'' - z_n')) - x|$$
$$\leq |z_n' - x| + 2^q |z_n'' - z_n'|$$
$$\leq \frac{R}{2} + 2^q 2^{-q} \frac{R}{2} < R.$$

Allora $z' + 2^q(z_n'' - z_n') \in D$
$$\Rightarrow |y(z_n'') - y(z_n')| \overset{(*)}{\leq} 2^{-q} 2K < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

L'estensione continua di y viene anche chiamata y.

<u>Proposizione 2.2.7</u>: [limite termodinamico dell'energia]

Se $\Lambda \longrightarrow \infty$ nel senso di Fisher e
$$\frac{n}{V(\Lambda)} \longrightarrow L^{-3}\delta, \quad \frac{S}{V(\Lambda)} \longrightarrow L^{-3}\sigma \quad \text{per un } (\delta, \sigma) \in \Delta,$$
allora $\lim\limits_{\Lambda \to \infty} \frac{E(\Lambda, n, S)}{V(\Lambda)} = L^{-3} y(\delta, \sigma)$.

<u>Dimostrazione:</u> (1) $\underline{\limsup\limits_{\Lambda \to \infty} \frac{E(\Lambda, n, S)}{V(\Lambda)} \leq L^{-3} y(\delta, \sigma)}$:

Sia δ_0 diadico, con $\delta_0 > \delta$. (Pensiamo a $\delta_0 \to \delta$).

Siccome δ_0 è diadico, esistono $\underline{N} \in \mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che: $\delta_0 = \frac{n_0}{8^{\underline{N}}}$.

Multiplicando n_0 con 8 (un paio di volte) possiamo scegliere un $N \geq \underline{N}$ senza cambiare δ_0 tale che (dipendente da n):

$$(**) \quad \frac{L_N^3}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{L_N^{3+\varepsilon}}{n} \longrightarrow +\infty. \qquad (\Lambda \to \infty)$$

(Con L_N definito come nei altri lemma.)

Attenzione: siccome $n V(\Lambda)^{-1} \to L^{-3}\delta$, n dipende da Λ (infatti, cresce con $V(\Lambda)$).
La scelta iniziale di n_0 e $\underline{N}$ non dipende da Λ, allora sicuramente $\frac{L_{\underline{N}}}{n} \longrightarrow 0$ $(\Lambda \to \infty)$.
La scelta di $N \geq \underline{N}$ invece è in dipendenza da n, e allora in dipendenza da Λ, tale che $(**)$ vale.

Scriviamo $n = m\, n_0 + r_0$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq r_0 < n_0$.
Scriviamo $r_0 = p \cdot 8^N + r_1$, $0 \leq r_1 < 8^N$.

Si può dimostrare che, per $\Lambda \to \infty$ nel senso di Fisher, esiste un Λ suff. grande tale che Λ contiene $m+p+1$ cubi (senza intersezione) con lato ζL_N, dove $1 < \zeta < \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{1/3}$.

Allora Λ contiene cubi $\Lambda_N^{(i)}$, $i = 1, \dots, m+p+1$, traslati di Λ_N, con distanziamento almeno $(\zeta - 1) L_N$.
Otteniamo:

E è decrescente rispetto Λ, Lemma 2.2.1 (b)

$$\begin{aligned}
E(\Lambda, n, S) &\leq E\Big(\bigcup_{i=1}^{m+p+1} \Lambda_N^{(i)},\; m n_0 + \underbrace{p\, 8^N + r_1}_{r_0},\; S\Big) \\
&\leq m\, E\Big(\Lambda_N, n_0, \frac{1}{m}\big(S - r_0 \log V(\Lambda_0)\big)\Big) \\
&\quad + E\Big(\bigcup_{i=m+1}^{m+p+1} \Lambda_N,\; r_0,\; r_0 \log V(\Lambda_0)\Big) \\
&\quad + \frac{A}{2} n^2 (\zeta - 1)^{-3-\varepsilon} L_N^{-3-\varepsilon}.
\end{aligned}$$