Lemma 2.2.3 [Limite su cubi "diadici"] U stabile,

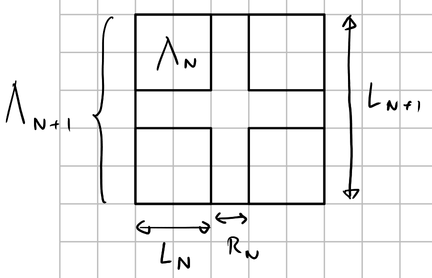
$\phi(q) = \frac{A}{|q|^{3+\varepsilon}}$ per $|q| \geq R_0$, $\theta \in (2^{\frac{3}{3+\varepsilon}}, 2)$, $R := \frac{R_0}{2-\theta}$, $L > R$.

$\Lambda_N \subset \mathbb{R}^3$ un cubo con lati $L_N := 2^N L - \theta^N R$, $\delta = \frac{p}{2^q}$, $p, q \in \mathbb{R}$.

$\sigma \in \mathbb{R}$. Allora esiste $\lim_{N\to\infty} \frac{E(\Lambda_N, 2^{3N}\delta, 2^{3N}\sigma)}{2^{3N}} =: \eta(\delta, \sigma)$.

usa ϕ temperata

Dimostrazione:



$$E\left(\Lambda_{N+1}, \sum_{i=1}^{8} n_i, \sum_{i=1}^{8} S_i\right) \leq \sum_{i=1}^{8} E(\Lambda_N, n_i, S_i) + \frac{A}{2}\left(\sum_{i=1}^{8} n_i\right)^2 \frac{1}{R_N^{3+\varepsilon}}.$$

$$E(\Lambda_{N+1}, 8n, 8S) \leq 8E(\Lambda_N, n, S) + \frac{A}{2}(8n)^2 \frac{1}{R_N^{3+\varepsilon}}.$$

$$C_N(\delta, \sigma) := \frac{1}{8^N} E(\Lambda_N, 8^N\delta, 8^N\sigma) - \frac{A}{2}\delta^2 \sum_{m=0}^{N-1} \frac{8^{m+1}}{R_m^{3+\varepsilon}}.$$

(almeno per $N > q/3$).

Continuiamo la dimostrazione: dimostriamo che $C_N(\delta,\sigma)$ è una successione decrescente:

$$\begin{aligned}
&C_N(\delta,\sigma) - C_{N+1}(\delta,\sigma) \\
&= \frac{1}{8^N} E(\Lambda_N, 8^N\delta, 8^N\sigma) - \frac{A}{2}\delta^2 \sum_{m=0}^{N-1} \frac{8^{m+1}}{R_m^{3+\varepsilon}} \\
&\quad - \frac{1}{8^{N+1}} E(\Lambda_{N+1}, 8^{N+1}\delta, 8^{N+1}\sigma) + \frac{A}{2}\delta^2 \sum_{m=0}^{N} \frac{8^{m+1}}{R_m^{3+\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

con la disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
&\geq \cancel{\frac{1}{8^N} E(\Lambda_N, 8^N\delta, 8^N\sigma)} - \cancel{\frac{A}{2}\delta^2 \sum_{m=0}^{N-1} \frac{8^{m+1}}{R_m^{3+\varepsilon}}} \\
&\quad - \cancel{\frac{1}{8^{N+1}}\, 8\, E(\Lambda_N, 8^N\delta, 8^N\sigma)} - \cancel{\frac{1}{8^{N+1}} \frac{A}{2}(8^{N+1}\delta)^2 / R_N^{3+\varepsilon}} \\
&\quad + \cancel{\frac{A}{2}\delta^2 \sum_{m=0}^{N} \frac{8^{m+1}}{R_m^{3+\varepsilon}}} \qquad = 0.
\end{aligned}$$

Allora esiste $\lim_{N\to\infty} C_N(\delta,\sigma) =: c(\delta,\sigma)$, forse $\pm\infty$.

Ma per la condizione di stabilità: ← usa stabilità

$$E(\Lambda, n, S) \geq -nB \Rightarrow \frac{1}{8^N} E(\Lambda_N, 8^N\delta, 8^N\sigma) \geq -\frac{1}{8^N} 8^N \delta B = -\delta B.$$

Inoltre:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{8^{m+1}}{R_m^{3+\varepsilon}} \underset{R_m = \theta^m (2-\theta) R}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N-1} 8 \left(\frac{8}{\theta^{3+\varepsilon}}\right)^m (2-\theta)^{-3-\varepsilon} R^{-3-\varepsilon}$$

e
$$\frac{8}{\theta^{3+\varepsilon}} < \frac{8}{\left(2^{\frac{3}{3+\varepsilon}}\right)^{3+\varepsilon}} = \frac{8}{2^3} = 1.$$

Così $c(\delta,\sigma) = -\infty$ è impossibile.

Se esiste $c(\delta,\sigma) \in \mathbb{R}$ e la serie, allora esiste anche $\eta(\delta,\sigma) \in \mathbb{R}$.

Attenzione: Rimane la possibilità $E(\Lambda_N, 8^N\delta, 8^N\sigma) = +\infty$ per ogni $N \in \mathbb{N}$,

e solo in questa situazione $C(\delta,\sigma) = +\infty$ e $\eta(\delta,\sigma) = +\infty$.

Lemma 2.2.4: [convessità di η per il caso diadico]

Siano $\delta_i = \frac{p_i}{2^{q_i}}$ $(i=1,2)$, $p_i \in \mathbb{N}$, $q_i \in \mathbb{N}$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$, e Λ_N come definito in lemma 2.2.3. Allora:

(a) $\eta\left(\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2), \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right) \leq \frac{1}{2}\left(\eta(\delta_1,\sigma_1) + \eta(\delta_2,\sigma_2)\right)$.

(b) per $\alpha \in \frac{\tilde{p}}{2^q}$, con $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\eta(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2, \alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2) \leq \alpha\,\eta(\delta_1,\sigma_1) + (1-\alpha)\,\eta(\delta_2,\sigma_2).$$

Dimostrazione:

(a) Nella dimostrazione di lemma 2.2.3:

$$E\left(\Lambda_{N+1}, \sum_{i=1}^{8} n_i, \sum_{i=1}^{8} n_i\right) \leq \sum_{i=1}^{8} E(\Lambda_N, n_i, \delta_i) + \frac{A}{2}\left(\sum_{i=1}^{8} n_i\right)^2 \frac{1}{R^{3+\varepsilon}}.$$

Da lemma 2.2.3:

$$\eta\left(\tfrac{1}{2}(\delta_1+\delta_2), \tfrac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{8^{N+1}} E\left(\Lambda_{N+1}, 8^{N+1}\tfrac{1}{2}(\delta_1+\delta_2), 8^{N+1}\tfrac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right)$$

scegliamo $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = \delta_1 8^N$

e $n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = \delta_2 8^N$ e così

$$\leq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{8^{N+1}}\left(4\,E(\Lambda_N, 8^N\delta_1, 8^N\sigma_1) + 4\,E(\Lambda_N, 8^N\delta_2, 8^N\sigma_2) + \frac{A}{2}\left(\sum_{i=1}^{8} n_i\right)^2 \frac{1}{R^{3+\varepsilon}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\eta(\delta_1,\sigma_1) + \frac{1}{2}\eta(\delta_2,\sigma_2) + \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{A}{2}\left(\sum_{i=1}^{8} n_i\right)^2 \frac{1}{R_N^{3+\varepsilon}}}_{=0 \text{ perché } R_N \to +\infty.}$$

(b) Questo è un argomento standard.

Osservazione: se $x_i = \frac{p_i}{2^{q_i}}$ (sono diadici), allora anche $x_i + x_j$ è diadico, e anche $\frac{1}{2}x_i$ e $2x_i$ rimane diadico.

Scrivendo $x = \binom{\delta}{\sigma} \in \mathbb{R}^2$, e con l'ipotesi $f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right) \leq \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$

otteniamo:

$$f\left(\frac{1}{2^n}(x_1+x_2+\dots+x_{2^n})\right) = f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{2^{n-1}}}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{x_{2^{n-1}+1}+\dots+x_{2^n}}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{2^{n-1}}}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x_{2^{n-1}+1}+\dots+x_{2^n}}{2^{n-1}}\right)$$

per induzione:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{2^n}}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} f(x_i).$$

Per $\alpha = \frac{m}{2^n}$: poniamo $x_i = x$ per $i=1,\dots,m$, $x_i = y$ per $m+1 \leq i \leq 2^n$.

Allora:

$$f\left(\frac{m}{2^n}x + \left(1-\frac{m}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{m}{2^n}f(x) + \left(1-\frac{m}{2^n}\right)f(y).$$

$\blacksquare$

<u>Lemma 2.2.5:</u> [stime superiori per l'energia]

(a) Sia $n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ tale che $n \leq 8^N$. Sia $S \leq n \log V(\Lambda_0)$.

Per Λ_N definito come in Lemma 2.2.3:

$$E(\Lambda_N, n, S) \leq n\frac{A}{2}\sum_{m=0}^{N-1} 8^{m+1}\frac{1}{R_m^{3+\varepsilon}}.$$

(b) Per $\delta = \frac{p}{2^q}$, $p,q \in \mathbb{N}$, $0 \leq \delta \leq 1$, e con $\sigma \leq \delta \log V(\Lambda_0)$, abbiamo:

$$\psi(\delta,\sigma) \leq \delta\frac{A}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{8^{m+1}}{R_m^{3+\varepsilon}}.$$

<u>Dimostrazione:</u> Riccordiamo

$$E\left(\Lambda_N, \sum_{i=1}^8 n_i, \sum_{i=1}^8 S_i\right) \leq \sum_{i=1}^8 E(\Lambda_{N-1}, n_i, S_i) + \frac{A}{2}\left(\sum_{i=1}^8 n_i\right)^2\frac{1}{R_{N-1}^{3+\varepsilon}}.$$

Da leggere come: "si può scegliere come distribuire le particelle quando taglio Λ_N in 8 pezzi".

Se taglio N volte, ottengo 8^N cubi. Metto 1 particella in n di questi cubi Λ_0, e negli altri 8^N-n cubi metto 0 particelle.

Come distribuire l'entropia?

Poniamo $S_1 := \log V(\Lambda_0)$, così $n S_1 = n \log V(\Lambda_0) \overset{\text{Ipotesi}}{\geq} S$.

Rimane $S - nS_1 \leq 0$ da distribuire tra i 8^N-n cubi vuoti:

$$S_0 := \frac{1}{8^N-n}(S-nS_1) \leq 0.$$

Così $S = nS_1 + (8^N-n)S_0$.

In ogni cubo Λ_0 con una particella metto entropia S_1, nei cubi vuoti metto S_0:

$$\begin{aligned}E(\Lambda_N, n, S) &= E(\Lambda_N, n\cdot 1 + (8^N-n)\cdot 0, nS_1 + (8^N-n)S_0)\\ &\leq nE(\Lambda_0, 1, S_1) + (8^N-n)E(\Lambda_0, 0, S_0)\end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^{N} \frac{A}{2} \frac{8^{N-m}}{R_{m-1}^{3+\varepsilon}} \left(\sum_{i=1}^{8} n_i^{(m)} \right)^2$$

distribuzione di particelle nel passo m (quando andiamo da Λ_m ad Λ_{m-1}).

errore in Ruelle "1-N" invece di 8^{N-m}

quando vado da Λ_N a Λ_{N-1} ho una volta l'errore, quando vado da Λ_{N-1} a Λ_{N-2} devo già fa la procedura 8 volte, etc.

Nel passo $N \rightsquigarrow N-1$ abbiamo $\sum_{i=1}^{8} n_i^{(N)} = n$ particelle da distribuire.

Nel passo $N-1 \rightsquigarrow N-2$ sicuramente $\sum_{i=1}^{8} n_i^{(N-1)} \leq \frac{n}{8}$ particelle.

(in dimensione $\mathbb{R}^1$)

8 = n

4 2 $\downarrow \Lambda^{N-1}$

2 2 2 0

1 1 1 1 1 1 0 0

Continuiamo settimana prossima qua.