$$\Omega(\Lambda, n, E) := \frac{1}{n!} |\{q \in \Lambda^n : U(q) \leq E\}|$$
$$S(\Lambda, n, E) := \log \Omega(\Lambda, n, E)$$

Lemma 2.2.1 [monotonia] $S(\Lambda, n, E)$ è crescente rispetto Λ ed E.

$E(\Lambda, n, S)$ è (a) crescente rispetto S

(b) decrescente rispetto Λ.

Inoltre $E(\Lambda, n, S) \geq -nB$.

Lemma 2.2.2 [sistemi in vicinanza] Sia Φ temperata:

$\Phi(x) \leq \frac{A}{|x|^{3+\varepsilon}}$ per $|x| \geq R_0$. Allora:

(a) per $\operatorname{dist}(\Lambda_1, \Lambda_2) =: r \geq R_0$: $\forall S_1, S_2 \in \mathbb{R}$:
$$E(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1 + n_2, S_1 + S_2) \leq E(\Lambda_1, n_1, S_1) + E(\Lambda_2, n_2, S_2) + A n_1 n_2 r^{-(3+\varepsilon)}.$$

(b) Per $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m \subset \mathbb{R}^3$ con tutte le distanze tra coppie $\geq r \geq R_0$ abbiamo:
$$E\left(\bigcup_{i=1}^m \Lambda_i, \sum_{i=1}^m n_i, \sum_{i=1}^m S_i\right) \leq \sum_{i=1}^m E(\Lambda_i, n_i, S_i) + \frac{A}{2}\left(\sum_{i=1}^m n_i\right)^2 r^{-(3+\varepsilon)}.$$

Dimostrazione: (a) Siano $x_1', \dots, x_{n_1}' \in \Lambda_1$, e $x_1'', \dots, x_{n_2}'' \in \Lambda_2$ tale che:
$$U(x_1', \dots x_{n_1}') \leq E_1, \quad U(x_1'', \dots, x_{n_2}'') \leq E_2, \quad E_1, E_2 \in \mathbb{R}$$

Allora: $U(x_1', \dots x_{n_1}', x_1'', \dots, x_{n_2}'')$
$$= U(x_1', \dots x_{n_1}') + U(x_1'', \dots, x_{n_2}'') + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \Phi(x_i' - x_j'').$$

Siccome $|x_i' - x_j''| \geq r \quad \forall i = 1, \dots, n_1 \ \forall j = 1, \dots, n_2$

otteniamo: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \Phi(x_i' - x_j'') \leq \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{A}{|x_i' - x_j''|^{3+\varepsilon}}$
$$\leq A n_1 n_2 r^{-(3+\varepsilon)}.$$

$$\Rightarrow U(x_1', \dots x_{n_1}', x_1'', \dots x_{n_2}'') \leq E_1 + E_2 + A n_1 n_2 r^{-(3+\varepsilon)}.$$

Il prodotto cartesiano:
$$\{(x_1', \dots x_{n_1}') \in \Lambda_1^{n_1} : U(x_1', \dots x_{n_1}') \leq E_1\} \times \{(x_1'', \dots, x_{n_2}'') \in \Lambda_2^{n_2} : U(x_1'', \dots, x_{n_2}'') \leq E_2\}$$
$$= \{(x_1', \dots x_{n_1}', x_1'', \dots x_{n_2}'') \in \Lambda_1^{n_1} \times \Lambda_2^{n_2} : U(x_1', \dots, x_{n_1}') \leq E_1 \text{ e } U(x_1'', \dots, x_{n_2}'') \leq E_2\}$$

$$\subset \{(x'_1,\dots x'_{n_1}, x''_1,\dots x''_{n_2}) \in \Lambda_1^{n_1}\times\Lambda_2^{n_2} : U(x'_1,\dots x'_{n_1}, x''_1,\dots, x''_{n_2}) \le E_1 + E_2 + \frac{A n_1 n_2}{r^{3+\varepsilon}}\}$$

Permettiamo adesso che l'ordine non è solo "prime n_1 particelle in Λ_1" ma invece "n_1 particelle in Λ_1". Il numero di questo tipo di configurazioni è più grande:

per $\dfrac{(n_1+n_2)!}{n_1!\, n_2!}$

$$|\{(x'_1,\dots x'_{n_1}, x''_1,\dots x''_{n_2}) \in \Lambda_1^{n_1}\times\Lambda_2^{n_2} : U(x'_1,\dots x'_{n_1}, x''_1,\dots x''_{n_2}) \le E_1 + E_2 + \frac{A n_1 n_2}{r^{3+\varepsilon}}$$

$$= \frac{n_1!\, n_2!}{(n_1+n_2)!} |\{(x_1,\dots, x_{n_1+n_2}) \in (\Lambda_1\cup\Lambda_2)^{n_1+n_2} : U(x_1,\dots x_{n_1+n_2}) \le E_1 + E_2 + \frac{A n_1 n_2}{r^{3+\varepsilon}}$$

e "ci sono n_1 coordinate in Λ_1"

e "ci sono n_2 coordinate in Λ_2" $\}|$

Ovviamente:

$$\{(x_1,\dots x_{n_1+n_2}) \in (\Lambda_1\cup\Lambda_2)^{n_1+n_2} : U(x_1,\dots x_{n_1+n_2}) \le E_1 + E_2 + \frac{A n_1 n_2}{r^{3+\varepsilon}}$$

e "n_1 coord. in Λ_1" e "n_2 in Λ_2"$\}$

$$\subset \{(x_1,\dots x_{n_1+n_2}) \in (\Lambda_1\cup\Lambda_2)^{n_1+n_2} : U(x_1,\dots x_{n_1+n_2}) \le E_1 + E_2 + \frac{A n_1 n_2}{r^{3+\varepsilon}}\}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_1!} |\{(x'_1,\dots, x'_{n_1}) \in \Lambda_1^{n_1} : U(x'_1,\dots x'_{n_1}) \le E_1\}| \frac{1}{n_2!} |\{(x''_1,\dots x''_{n_2}) \in \Lambda_2^{n_2} : U(x''_1,\dots x''_{n_2}) \le E_2\}|$$

$$\le \frac{1}{(n_1+n_2)!} |\{(x_1,\dots x_{n_1+n_2}) \in (\Lambda_1\cup\Lambda_2)^{n_1+n_2} : U(x_1,\dots, x_{n_1+n_2}) \le E_1 + E_2 + \frac{A n_1 n_2}{r^{3+\varepsilon}}\}|.$$

$$\Rightarrow S(\Lambda_1\cup\Lambda_2, n_1+n_2, E_1+E_2+\frac{A n_1 n_2}{r^{3+\varepsilon}}) \ge S(\Lambda_1, n_1, E_1) + S(\Lambda_2, n_2, E_2). \qquad (*)$$

Andiamo adesso dall'entropia all'energia:

vogliamo dimostrare: $\forall S_1, S_2 \in \mathbb{R}$:

$$E(\Lambda_1\cup\Lambda_2, n_1+n_2, S_1+S_2) \le E(\Lambda_1, n_1, S_1) + E(\Lambda_2, n_2, S_2) + \frac{A n_1 n_2}{r^{3+\varepsilon}}.$$

Siano $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$. $(i=1,2)$

$E(\Lambda_i, n_i, S_i)$ è definito tale che: $S(\Lambda_i, n_i, E(\Lambda_i, n_i, S_i)) = S_i$.

$E(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1+n_2, S_1+S_2)$ è definita tale che

$$S(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1+n_2, E(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1+n_2, S_1+S_2)) = S_1+S_2.$$

Con $(*)$:
$$S(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1+n_2, E(\Lambda_1, n_1, S_1)+E(\Lambda_2, n_2, S_2) + A n_1 n_2 / r^{3+\varepsilon})$$
$$\geq S(\Lambda_1, n_1, E(\Lambda_1, n_1, S_1)) + S(\Lambda_2, n_2, E(\Lambda_2, n_2, S_2))$$
$$= S_1 + S_2$$

Queste due disuguaglianze insieme:

$$S(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1+n_2, E(\Lambda_1, n_1, S_1)+E(\Lambda_2, n_2, S_2) + A n_1 n_2 / r^{3+\varepsilon})$$
$$\geq S(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1+n_2, E(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1+n_2, S_1+S_2)).$$

Adesso possiamo usare che S è crescente rispetto l'energia:

$$E(\Lambda_1, n_1, S_1)+E(\Lambda_2, n_2, S_2) + A n_1 n_2 / r^{3+\varepsilon} \geq E(\Lambda_1 \cup \Lambda_2, n_1+n_2, S_1+S_2),$$

valido per ogni $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$.

(b) segue da (a) usando induzione rispetto $m \in \mathbb{N}$. ∎

<u>Lemma 2.2.3</u> [limite su cubi "diadici"] Sia ϕ temperata, $\phi(q) \leq \frac{A}{|q|^{3+\varepsilon}}$, per $|q| \geq R_0$. Sia $\theta \in (2^{\frac{3}{3+\varepsilon}}, 2)$, sia $R := \frac{R_0}{2-\theta}$, sia $L > R$.

Sia $\Lambda_N \subset \mathbb{R}^3$ un cubo con lati avendo lunghezza $L_N := 2^N L - \theta^N R$, $N \in \mathbb{N}$.

Sia $\delta = \frac{p}{2^q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, sia $\sigma \in \mathbb{R}$.

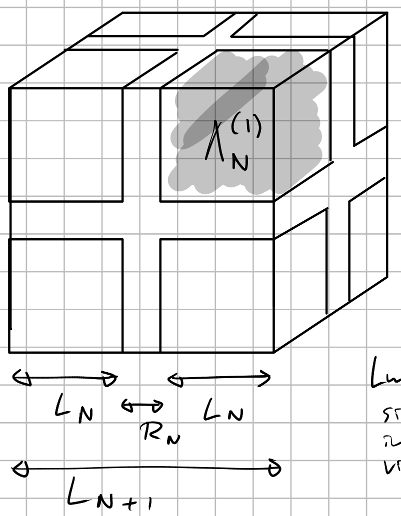
Allora esiste il limite

$$\lim_{N \to \infty} \frac{E(\Lambda_N, 2^{3N}\delta, 2^{3N}\sigma)}{2^{3N}} =: \eta(\delta, \sigma).$$

Si può avere $\eta(\delta,\sigma) = +\infty$ se e solo se $E(\Lambda_N, 2^{3N}\delta, 2^{3N}\sigma) = +\infty$ per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: Si può dividere Λ_{N+1} in $2^3 = 8$ traslazioni $\Lambda_N^{(i)}$ $(i = 1, \dots, 8)$ del cubo Λ_N, tale che i $\Lambda_N^{(i)}$ hanno distanza di almeno

$$R_N := L_{N+1} - 2L_N = 2^{N+1}L - \theta^{N+1}R - 2(2^N L - \theta^N R)$$
$$= \underbrace{\theta^N}_{>1} \underbrace{(2-\theta)R}_{= R_0} \geq R_0 .$$



Allora
$$E\Big(\Lambda_{N+1}, \sum_{i=1}^{8} n_i, \sum_{i=1}^{8} S_i\Big)$$

Lm. 2.2.1 (b): E è decrescente rispetto Λ

$$\leq E\Big(\bigcup_{i=1}^{8} \Lambda_N^{(i)}, \sum_{i=1}^{8} n_i, \sum_{i=1}^{8} S_i\Big)$$

Lm. 2.2.2 (b) sistemi in vicinanza

$$\leq \sum_{i=1}^{8} E(\Lambda_N, n_i, S_i) + \frac{A}{2}\Big(\sum_{i=1}^{8} n_i\Big)^2 \frac{1}{R_N^{3+\varepsilon}}$$

qua abbiamo anche usato che E non dipende dalla traslazione di Λ_N o $\Lambda_N^{(i)}$ perché S non dipende dalla traslazione.

In particolare:

$$E(\Lambda_{N+1}, 8n, 8S) \leq 8E(\Lambda_N, n, S) + \frac{A}{2}(8n)^2 / R_N^{3+\varepsilon} .$$

Grazie all'ipotesi $\delta = \frac{\rho}{2^9}$ abbiamo che $8^N \delta = \rho\, 2^{3N-9}$ è un numero intero per $3N \geq 9$. Allora $8^N \delta$ è una valida scelta del numero di particelle, e così possiamo definire:

$$c_N(\delta, \sigma) := \frac{1}{8^N} E(\Lambda_N, 8^N \delta, 8^N \sigma) - \frac{A}{2}\delta^2 \sum_{m=0}^{N-1} 8^{m+1} / R_m^{3+\varepsilon} .$$

$\longrightarrow$ da continuare.