

Fisica Matematica 3

Meccanica Statistica

Appello 20/9/2022

Esercizio 1: Catena di particelle

Siano $\omega, m > 0$. Consideriamo una catena di N particelle classiche accoppiate tra primi vicini tramite un potenziale armonico; vuol dire consideriamo l'Hamiltoniana

$$H(\underline{p}, \underline{q}) := \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N \frac{\omega}{2} (q_{i+1} - q_i)^2,$$

per i momenti $\underline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N$ e le posizioni $\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^N$. Per semplicità consideriamo condizioni al bordo periodiche, allora $q_{N+1} := q_1$. Attenzione che le particelle sono distinguibili attraverso la posizione nella catena.

Il sistema viene messo in contatto con un serbatoio di temperatura inversa $\beta > 0$.

- Scrivere la funzione di partizione del sistema. Spiegare i motivi per la formula scritta in poche (!) parole.
- Calcolare la funzione di partizione. (Si può usare che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.)
- Calcolare la media dell'energia cinetica della particella in posizione i della catena (allora il valore atteso di p_i^2).

Esercizio 2: Nuovo metodo per la soluzione del modello di Ising in $d = 1$

Consideriamo il modello di Ising in dimensione $d = 1$ sull'insieme $\Lambda_n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ senza condizioni al bordo (condizioni libere), per temperatura inversa $\beta \geq 0$ e campo magnetico $h = 0$: allora l'energia di una configurazione $\omega \in \Omega_{\Lambda_n}$ è data dall'Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_{\Lambda_n, \beta, 0}(\omega) := -\beta \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda_n}} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega).$$

- Scrivere la funzione di partizione $Z_{\Lambda_n, \beta, 0}$.
- Riscrivere la funzione di partizione usando le nuove variabili $\omega_1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ dove $\tau_i := \omega_{i-1} \omega_i$ ed usare queste variabili per calcolare $Z(\Lambda_n, \beta, 0)$ esplicitamente.
- Calcolare il limite termodinamico dell'energia libera $\psi(\beta, 0)$.