Fisica Matematica 3

Meccanica Statistica

Appello 22/11/2022

Esercizio 1: Un gas classico

Consideriamo in dimensione $d = 1$ per N particelle la funzione Hamiltoniana

$$H(p, q) := \sum_{i=1}^{N} \left(p_i^2 + q_i^4\right) \ ,$$

per momenti $p = (p_1, p_2, \ldots) \in \mathbb{R}^N$ e posizioni $q = (q_1, q_2, \ldots) \in \mathbb{R}^N$.

a. Calcolare la funzione di partizione canonica $Z(N, \beta)$. (La dipendenza da N e β è da calcolare esplicitamente. Si può lasciare integrali che non dipendono dai variabili.)

b. Calcolare l'entropia $S(N, E)$, dove E è l'energia del gas.

Esercizio 2: Modello di Ising con condizioni al contorno

Consideriamo il modello di Ising in dimensione $d = 1$ sull'insieme $B_n := \{-n, -n + 1, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n - 1, n\}$ con *condizioni al contorno* $\omega_i = +1$, per temperatura inversa $\beta \geq 0$ e campo magnetico esterno $h \in \mathbb{R}$.

a. Scrivere la definizione dell'Hamiltoniana e della funzione di partizione $Z^+(B_n, \beta, h)$ del sistema, spiegando in particolare come si realizza le condizioni al contorno.

b. Ottenere una rappresentazione del tipo "matrice di trasferimento" di $Z^+(B_n, \beta, h)$ (dove $h \neq 0$ è possibile).

c. Calcolare $Z^+(B_n, \beta, 0)$ (solo per $h = 0$).