Nichtrelativistische Quantenelektrodynamik

Langzeitverhalten angeregter Zustände

Niels Benedikter

Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

Universität Stuttgart

7. Februar 2011

Überblick

Overview

Grundlagen der Quantentheorie

Wir benötigen

- einen Hilbertraum $\mathcal{H}$: die Zustände
- einen selbstadjungierten dicht-definierten linearen Operator $H : D(H) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Grundlagen der Quantentheorie

Wir benötigen

- einen Hilbertraum $\mathcal{H}$: die Zustände
- einen selbstadjungierten dicht-definierten linearen Operator $H : D(H) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

H erzeugt die Zeitentwicklung e^{-iHt}.

Grundlagen der Quantentheorie

Wir benötigen

- einen Hilbertraum $\mathcal{H}$: die Zustände
- einen selbstadjungierten dicht-definierten linearen Operator $H : D(H) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

H erzeugt die Zeitentwicklung e^{-iHt}.

Sei $\psi_0 \in \mathcal{H}$, dann ist $\psi(t) = e^{-iHt}\psi_0$ die eindeutige Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t) = H\psi(t) \quad \text{mit AB} \quad \psi(0) = \psi_0.$$

Fockraum

- Hilbertraum eines Punktteilchens in 3 Dimensionen: $L^2(\mathbb{R}^3)$
- Hilbertraum für n Punktteilchen: $L^2(\mathbb{R}^{3n})$
- Photonen sind Bosonen, d. h. wir schränken uns auf bzgl. Permutation total symmetrische Zustände ein:

  $$\text{für alle Permut. } \sigma \text{ sei } f(\boldsymbol{k}_1, \dots \boldsymbol{k}_n) = f(\boldsymbol{k}_{\sigma(1)}, \dots \boldsymbol{k}_{\sigma(n)}),$$

  Hilbertraum: $L^2_s(\mathbb{R}^{3n})$.
- Hilbertraum für variable Teilchenzahl:

  $$\text{Fockraum} \quad \mathcal{F} = \oplus_{n=0}^{\infty} L^2_s(\mathbb{R}^{3n}).$$

(Wir unterdrücken überall die Helizität um die Notation kurz zu halten.)

Fockraum: Erzeuger und Vernichter

- Zustand in $\mathcal{F}$: eine Folge $\psi = (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\psi_n \in L^2_s(\mathbb{R}^{3n})$.
- Erzeuger erzeugt Teilchen im Zustand $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$[a^*(f)\psi]_n(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_k)\psi_{n-1}(\boldsymbol{x}_1, \dots \widehat{\boldsymbol{x}_k} \dots \boldsymbol{x}_n)$$

- Vernichter vernichtet ein Teilchen:

$$[a(f)\psi]_n(\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_n) = \sqrt{n+1} \int \overline{f(\boldsymbol{x})}\psi_{n+1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{x}_n)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Kanonische Vertauschungsrelationen (CCR)

$$a(f)a^*(g) - a^*(g)a(f) = \langle f, g\rangle_{L^2}\, \mathbb{1}$$

$$a(f)a(g) - a(g)a(f) = 0 = a^*(f)a^*(g) - a^*(g)a^*(f)$$

Die nichtrelativistische QED (in Dipolapprox.)

Einfachster Fall: Genau ein Elektron und das em. Feld

$$\mathcal{H}_{\mathrm{el}} = L^2(\mathbb{R}^3), \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{el}} \otimes \mathcal{F}_s.$$

- Hamilton-Operator ohne em. Feld:
  $H_{\mathrm{el}} = \boldsymbol{p}^2 + V = -\Delta + V$ auf $\mathcal{H}_{\mathrm{el}}$

Die nichtrelativistische QED (in Dipolapprox.)

Einfachster Fall: Genau ein Elektron und das em. Feld

$$\mathcal{H}_{\text{el}} = L^2(\mathbb{R}^3), \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{F}_s.$$

- Hamilton-Operator ohne em. Feld:
  $H_{\text{el}} = \boldsymbol{p}^2 + V = -\Delta + V$ auf $\mathcal{H}_{\text{el}}$
- Hamilton-Operator mit Feld, ohne Wechselwirkung:
  $H_0 = (-\Delta + V) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\text{f}}$ auf $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{F}_s$

Die nichtrelativistische QED (in Dipolapprox.)

Einfachster Fall: Genau ein Elektron und das em. Feld

$$\mathcal{H}_{\text{el}} = L^2(\mathbb{R}^3), \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{F}_s.$$

- Hamilton-Operator ohne em. Feld:
  $H_{\text{el}} = \boldsymbol{p}^2 + V = -\Delta + V$ auf $\mathcal{H}_{\text{el}}$
- Hamilton-Operator mit Feld, ohne Wechselwirkung:
  $H_0 = (-\Delta + V) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\text{f}}$ auf $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{F}_s$
- Hamilton-Operator mit Feld, WW in Dipolapproximation:
  Sei $E_i(\mathbf{0}) = a(G_i) + a^*(G_i)$, G_i beschreibe bei $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ lokalisiertes Photon (zu L^2 ausgeschmiert).
  $H = (-\Delta + V) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\text{f}} + e \sum_{i=1}^{3} x_i \otimes E_i(\mathbf{0})$ auf $\mathcal{H}$.

Die nichtrel. QED ist wohldefiniert.

Theorem (Hasler-Herbst)

Sei $H = -\Delta \otimes \mathbb{1} + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + e \sum_{i=1}^{3} x_i \otimes E_i(\mathbf{0})$.

Sei V *bzgl.* $-\Delta$ *infinitesimal beschränkt.*

Dann ist H *mit Definitionsbereich* $D = H^2(\mathbb{R}^3) \otimes D(H_f)$ *selbstadjungiert.*

Beweis: Ohne Potential V mittels quadratischer Formen.
Dann Potential mittels Satz von Kato-Rellich hinzufügen.

Overview

Eigenvektoren = stationäre Zustände

- Sei $H\psi = E\psi$. Dann ist $e^{-iHt}\psi = e^{-iEt}\psi$.
- Physikalische Größen:

  Erwartungswerte $\langle e^{-iHt}\psi, Ae^{-iHt}\psi \rangle$ eines Operators A.

$\rightsquigarrow$ für Eigenvektoren hebt sich Phase e^{-iEt} weg

$\rightsquigarrow$ triviale Zeitentwicklung, Zustand ist stationär.

Eigenvektoren = stationäre Zustände

- Sei $H\psi = E\psi$. Dann ist $e^{-iHt}\psi = e^{-iEt}\psi$.
- Physikalische Größen:

  Erwartungswerte $\langle e^{-iHt}\psi, Ae^{-iHt}\psi \rangle$ eines Operators A.

  $\rightsquigarrow$ für Eigenvektoren hebt sich Phase e^{-iEt} weg

  $\rightsquigarrow$ triviale Zeitentwicklung, Zustand ist stationär.

- Erfahrungsgemäß sind angeregte Zustände nicht stationär sondern zerfallen!

$\rightsquigarrow$ Ziel: Beweise, dass keine Eigenvektoren außer dem Grundzustand ψ_g existieren.

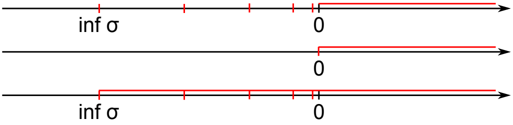
Spektrum der nichtrel. QED

Ungekoppeltes System

$\sigma(-\Delta + V)$:

$\sigma(H_f)$:

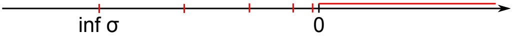
$\sigma(-\Delta + V + H_f)$:



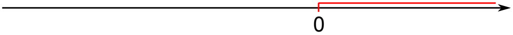
Spektrum der nichtrel. QED

Ungekoppeltes System

$\sigma(-\Delta + V)$:



$\sigma(H_\mathrm{f})$:



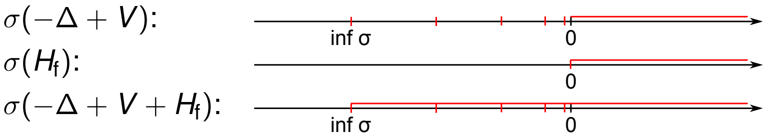
$\sigma(-\Delta + V + H_\mathrm{f})$:

Gekoppeltes System:

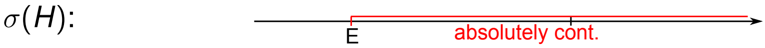
$\sigma(H)$:

Spektrum der nichtrel. QED

Ungekoppeltes System



Gekoppeltes System:



Beweis z. B. via Mourre-Theorie: (z. B. Fröhlich-Griesemer-Sigal)
Suche Operator A mit $HA - AH \geq c > 0$.
Dann kann H keinen Eigenvektor haben, da sonst

$$0 = E \langle \psi, A\psi \rangle - \langle \psi, A\psi \rangle E = \langle \psi, (HA - AH)\psi \rangle \geq c \langle \psi, \psi \rangle > 0.$$

Langzeitverhalten: Übergang in Grundzustand

Langzeitverhalten: Übergang in Grundzustand

Anregungsoperator für das „Atom“: $\alpha^\dagger \sim x_1 - ip_1$.

Theorem (B.)

Sei $V(\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{x}^2$. Sei e klein. Dann

$$\|e^{-iHt}\alpha^\dagger\psi_g - \underbrace{a^*(e^{-i\omega t}\phi_+)}_{\text{freies Photon}}\ \underbrace{e^{-iEt}\psi_g}_{\text{Grundzustand}}\| \leq Ce^{-\gamma t} + \mathcal{O}(e^2).$$

Weiterhin:

- *Photonzustand $\phi_+(\boldsymbol{k}, \lambda)$ ist explizit berechenbar, hat Peak bei Energie der Anregung $+\mathcal{O}(e^2)$.*
- *Nicht-triviale obere und untere Schranken für γ bestimmt.*

Höhere Anregungen $(\alpha^\dagger)^n\psi_g$ analog behandelbar.

Beweisskizze

Idee: Der Hamilton-Operator ist quadratisch $\rightsquigarrow$ es genügt die entsprechenden klass. Bew.gl. zu lösen.

Beweisskizze

Idee: Der Hamilton-Operator ist quadratisch $\rightsquigarrow$ es genügt die entsprechenden klass. Bew.gl. zu lösen.

1. Löse gekoppeltes System aus Maxwell-Gln. und Punktladung.
   Via Fouriertransf. im Raum, dann Laplacetransf. in Zeit.

Beweisskizze

Idee: Der Hamilton-Operator ist quadratisch $\rightsquigarrow$ es genügt die entsprechenden klass. Bew.gl. zu lösen.

1. Löse gekoppeltes System aus Maxwell-Gln. und Punktladung.
   Via Fouriertransf. im Raum, dann Laplacetransf. in Zeit.
2. Übertrage klass. Lsg. in Lösung der Schrödingergl.
   Dazu Definitionsbereiche einiger Op. mit Nelsons Analytische-Vektoren-Thm. diskutieren

Beweisskizze

Idee: Der Hamilton-Operator ist quadratisch $\rightsquigarrow$ es genügt die entsprechenden klass. Bew.gl. zu lösen.

1. Löse gekoppeltes System aus Maxwell-Gln. und Punktladung.
   Via Fouriertransf. im Raum, dann Laplacetransf. in Zeit.
2. Übertrage klass. Lsg. in Lösung der Schrödingergl.
   Dazu Definitionsbereiche einiger Op. mit Nelsons Analytische-Vektoren-Thm. diskutieren
3. Lösung $\sim$ exponentiell relaxierende Terme + langsamer relaxierende Terme + „freies Photon und GZ"

Beweisskizze

Idee: Der Hamilton-Operator ist quadratisch $\rightsquigarrow$ es genügt die entsprechenden klass. Bew.gl. zu lösen.

1. Löse gekoppeltes System aus Maxwell-Gln. und Punktladung.
   Via Fouriertransf. im Raum, dann Laplacetransf. in Zeit.
2. Übertrage klass. Lsg. in Lösung der Schrödingergl.
   Dazu Definitionsbereiche einiger Op. mit Nelsons Analytische-Vektoren-Thm. diskutieren
3. Lösung $\sim$ exponentiell relaxierende Terme + langsamer relaxierende Terme + „freies Photon und GZ“
4. Weierstraßscher Vorbereitungssatz
   $\rightsquigarrow$ die langsam relaxierenden Terme sind $\mathcal{O}(e^2)$.

Asymptotische Vollständigkeit der Rayleigh-Streuung

Vermutung (ACR)

Sei Σ die Ionisierungsschwelle.

Alle Zustände aus dem spektralen Unterraum $\chi(H < \Sigma)$ zerfallen in den Grundzustand und freie Photonen,

d. h. lassen sich als Linearkombination von Zuständen ψ schreiben mit der Eigenschaft:

$$\|e^{-iHt}\psi - a^*(e^{-i\omega t}h_1)\cdots a^*(e^{-i\omega t}h_n)e^{-iEt}\psi_g\| \to 0 \quad (t \to \infty)$$

für geeignete Photonzustände $h_1, \dots h_n \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Offenes Infrarot-Problem, da Anzahl der Photonen schwer kontrollierbar.

Zusammenfassung

- Die nichtrel. QED ist eine rigorose Quantentheorie von Licht und Materie bei niedrigen Energien.
- Ziel: Langzeitverhalten der nichtrelativistischen QED verstehen
- Eigenvektoren des Hamilton-Operators (stationäre Zustände) können ausgeschlossen werden.
- Übergang in den Grundzustand ist bisher nur in vereinfachten Modellen bewiesen.